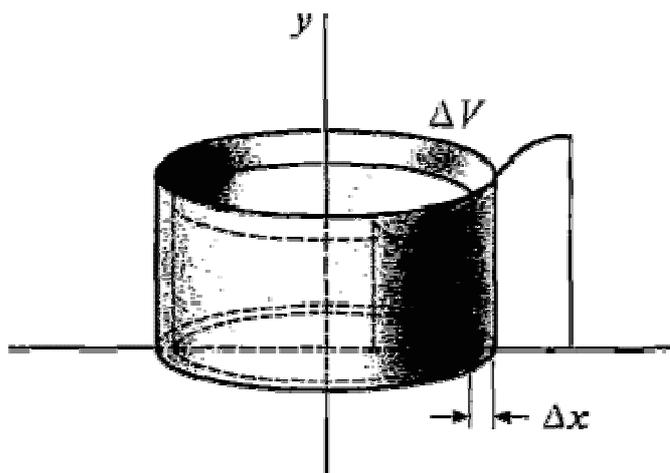
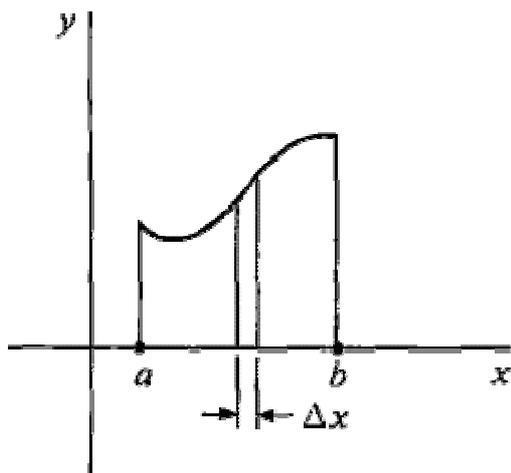


## IL METODO DEI GUSCI CILINDRICI

Il solido generato dalla rotazione attorno all'asse  $y$  di una regione piana può essere visto come somma di tanti "gusci cilindrici", cioè cilindri cavi di raggio interno  $x$ , raggio esterno  $x + \Delta x$  e altezza  $f(x)$ ,



Consideriamo il volume finito  $\Delta V$  di un "guscio" come volume infinitesimo  $dV$ , quindi trattiamo  $\Delta x$  come infinitesimo  $dx$ ; esso può essere espresso nella forma:

$$dV = \pi(x + dx)^2 f(x) - \pi x^2 f(x) = \pi x^2 f(x) + 2\pi x dx f(x) + \pi(dx)^2 f(x) - \pi x^2 f(x) = \\ = 2\pi x dx f(x) + \pi(dx)^2 f(x) \cong 2\pi x f(x) dx$$

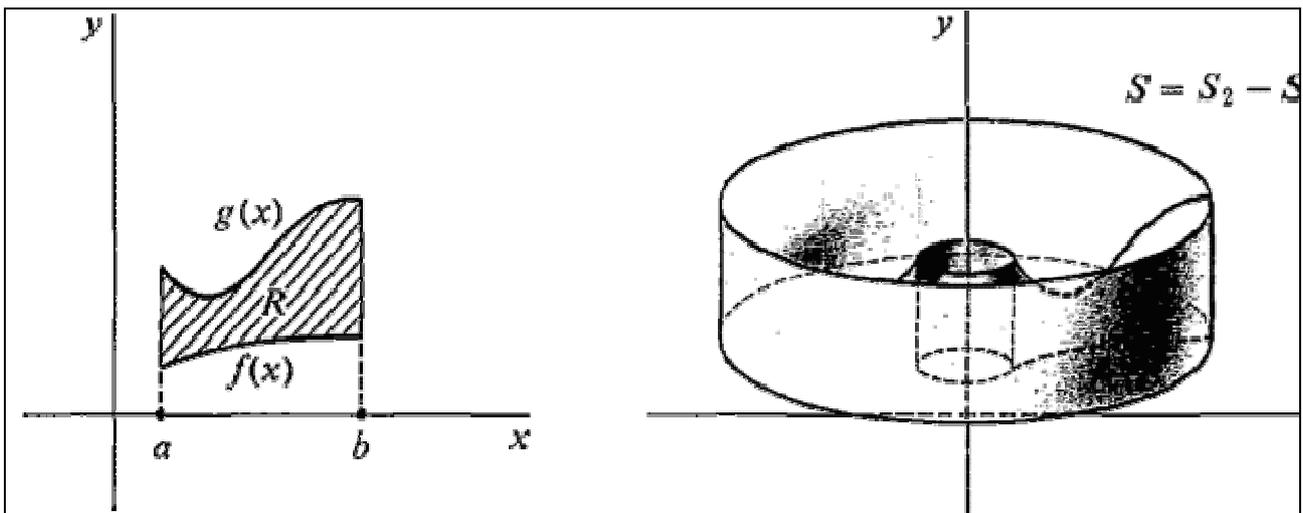
(N.B. il termine  $\pi(dx)^2 f(x)$  è trascurabile, poiché  $(dx)^2$  è infinitesimo di ordine superiore rispetto a  $dx$ ).

Quindi  $dV = 2\pi x f(x) dx$

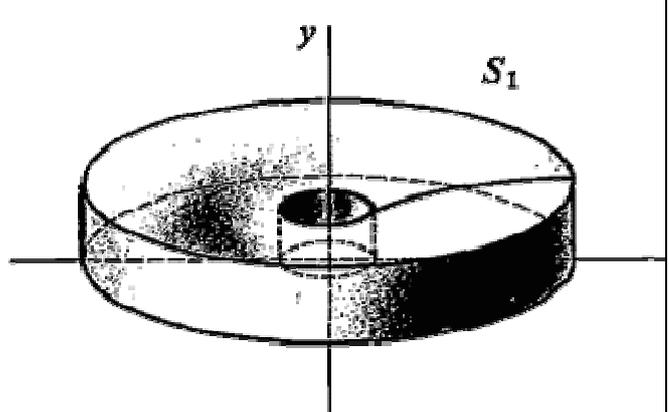
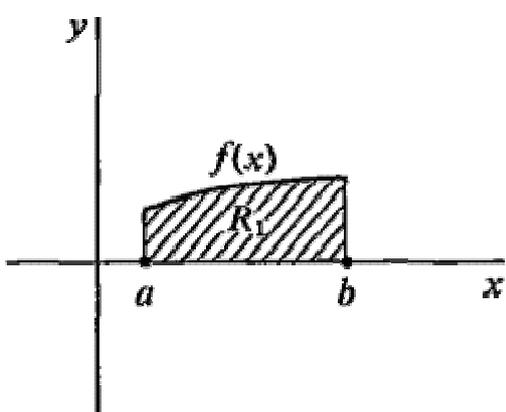
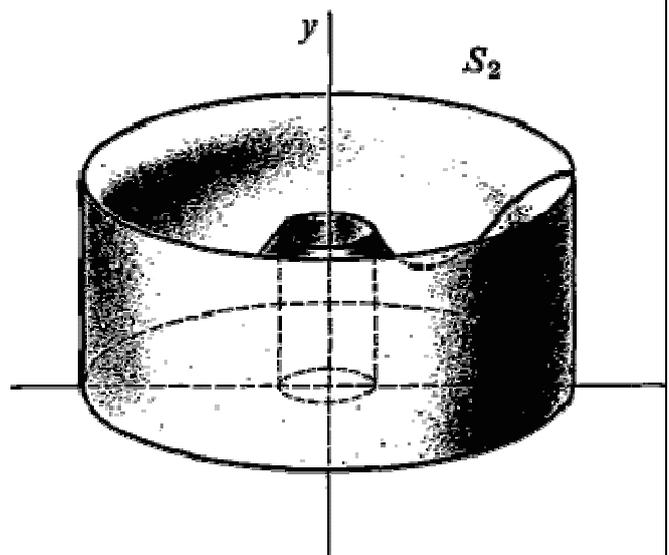
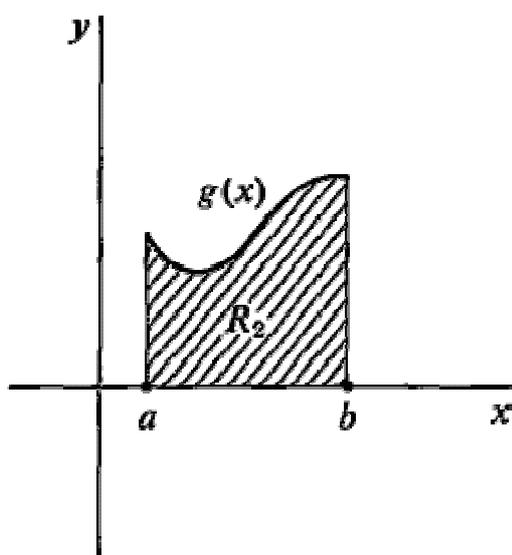
La somma degli infiniti gusci di volume  $dV$ , estesa all'intervallo delle ascisse  $[a;b]$  in cui è definita la regione che ruota, cioè il volume del nostro solido, può essere quindi calcolato mediante il seguente integrale:

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

Consideriamo il caso in cui la regione  $R$  è delimitata da due curve di equazione  $y=g(x)$  e  $y=f(x)$  nell'intervallo delle ascisse  $[a;b]$ .



il volume in questo caso si ottiene per differenza tra il volume generato dalla regione  $R_2$  delimitata dal grafico di  $g$ , dall'asse  $x$  e dalle rette  $x=a$  e  $x=b$  ed il volume generato dalla regione  $R_1$  delimitata dal grafico di  $f$ , dall'asse  $x$  e dalle rette  $x=a$  e  $x=b$ .

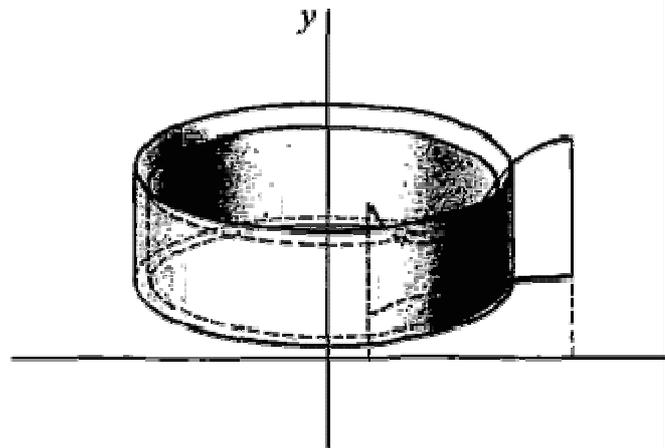
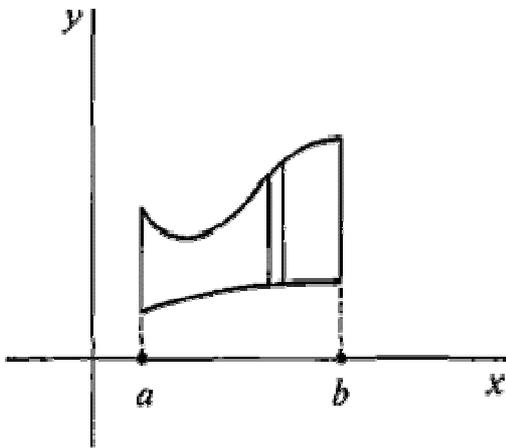


$$V = 2\pi \int_a^b x g(x) dx - 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

Tale volume può essere scritto nella forma:

$$V = 2\pi \int_a^b x(g(x) - f(x))dx$$

Tale formula evidenzia come il solido possa essere visto ancora come somma di tanti “gusci cilindrici”, di raggio interno  $x$ , raggio esterno  $x + dx$  e altezza  $g(x)-f(x)$ ,



### Esempi

- 1) Punto 2 del Problema 2 della maturità scientifica PNI del 2012:

[http://www.matefilia.it/maturita/spe2012/pni\\_2012\\_p2.pdf](http://www.matefilia.it/maturita/spe2012/pni_2012_p2.pdf)

- 2) Punto 4 del Problema 1 della maturità scientifica di ordinamento 2012:

[http://www.matefilia.it/maturita/ord2012/ordinamento\\_2012\\_p1.pdf](http://www.matefilia.it/maturita/ord2012/ordinamento_2012_p1.pdf)

- 3) Quesito 3 della maturità scientifica di ordinamento 2011:

<http://www.matefilia.it/maturita/ord2011/ord-2011-quesiti.pdf>

- 4) Quesito 1, Esame di Stato Americhe 2011:

[http://www.matefilia.it/maturita/prove\\_varie\\_2011/americhe\\_ordinaria2011.pdf](http://www.matefilia.it/maturita/prove_varie_2011/americhe_ordinaria2011.pdf)

### Sitografia

[http://www.vias.org/calculus/06\\_applications\\_of\\_the\\_integral\\_02\\_06.html](http://www.vias.org/calculus/06_applications_of_the_integral_02_06.html)