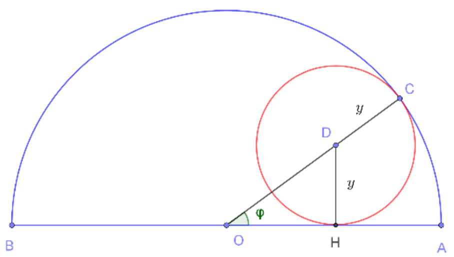
LICEO SCIENTIFICO SUPPLETIVA 1999 - PROBLEMA 1

Data una semicirconferenza di centro O e di diametro $\overline{AB} = 2$, si assuma su di essa un punto C in modo che l'angolo $A\hat{O}C$ sia acuto. Indicata con φ l'ampiezza di tale angolo, siano:

$x = tg\, \frac{\varphi}{2}$

$y =$ *raggio della circonferenza tangente tanto al diametro quanto, nel punto C, alla semicirconferenza.*

Dopo aver dimostrato che il centro di tale circonferenza appartiene al raggio OC, si studi e si rappresenti graficamente la funzione $y = f(x)$ senza tenere conto delle limitazioni di natura geometrica poste ad x dal problema.



Se la circonferenza è tangente in C alla semicirconferenza data ha in comune con essa la tangente in C; ma il centro di una circonferenza appartiene alla perpendicolare alla tangente nel punto di tangenza, quindi il suo centro appartiene alla perpendicolare alla tangente in C alla semicirconferenza, che è la retta OC: perciò il centro D della circonferenza appartiene al raggio OC.

$\overline{AB} = 2\,, \overline{OA} = \overline{OC} = 1,\ \ x = tg\, \frac{\varphi}{2}\ \ ,\ \ y = \overline{CD} = \overline{DH}$

DH perpendicolare ad AB;

$0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$.

Risulta: $y = OD\ \sin\varphi = (1-y)\ \sin\varphi$; quindi:

$$y = \sin\varphi\ - y\sin\varphi\,; y = \frac{\sin\varphi}{1+\sin\varphi}$$

Esprimiamo $\sin\varphi$ (che risulta positivo) in funzione di $x = tg\, \frac{\varphi}{2}$.

Sappiamo che $\sin\varphi = \frac{2tg\,\frac{\varphi}{2}}{1+tg^2\frac{\varphi}{2}} = \frac{2x}{1+x^2}$, perciò:

$$y=\frac{\sin\varphi}{1+\sin\varphi}=\frac{\frac{2x}{1+x^2}}{1+\frac{2x}{1+x^2}}=\frac{2x}{1+x^2+2x}=\frac{2x}{(1+x)^2}=f(x)$$

La funzione richiesta è quindi $y=f(x)=\frac{2x}{(1+x)^2}$ con le seguenti limitazioni:

siccome $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$, si ha $0<\frac{\varphi}{2}<\frac{\pi}{4}$, quindi $0<tg\frac{\varphi}{2}<1,\ cio$è $0<x<1$.

Studiamo la funzione di equazione $\boldsymbol{y=f(x)=\frac{2x}{(1+x)^2}}$ a prescindere dalle limitazioni geometriche della x.

Dominio: $x\neq-1$: $-\infty<x<-1\ vel\ -1<x<+\infty$; la funzione è continua e derivabile per ogni $x\neq-1$.

Simmetrie notevoli: poiché il dominio non è simmetrico rispetto all'origine degli assi, la funzione non può essere né pari né dispari: controllo analitico: $f(-x)=\frac{-2x}{(1-x)^2}$. Essendo $f(-x)\neq f(x)$la funzione non è pari (grafico non simmetrico rispetto all'asse delle y). Essendo $f(-x)\neq-f(x)$ la funzione non è dispari (grafico non simmetrico rispetto all'origine).

Intersezioni con gli assi cartesiani: $Se\ x=0, y=0.\ Se\ y=0, x=0$: il grafico interseca gli assi cartesiani nell'origine $O=(0;0)$.

Segno della funzione: $y>0\ \ se\ \ 2x>0, q\ uindi\ per\ x>0;\ \ y<0\ per\ x<0;\ \ y=0\ \ se\ x=0$

Calcolo dei limiti alla frontiera del dominio; ricordiamo che il dominio è:

$-\infty<x<-1\ vel\ -1<x<+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{(1+x)^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x}=0^-:$$

$y=0\ \ asintoto\ orizzontale\ per\ x\to-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{(1+x)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0^+:$$

$y=0\ asintoto\ orizzontale\ per\ x\to+\infty$

Questo ci permette di dire che non ci sono asintoti obliqui.

$\lim_{x\to(-1)^-}f(x)=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{2x}{(1+x)^2}=\left(\frac{-2}{0^+}\right)=-\infty$: $x=-1$ asintoto verticale per $x\to(-1)^-$.

$\lim_{x\to(-1)^+}f(x)=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{2x}{(1+x)^2}=\left(\frac{-2}{0^+}\right)=-\infty$: $x=-1$ asintoto verticale per $x\to(-1)^+$

Studio della derivata prima:

$f(x) = \frac{2x}{(1+x)^2}$, $\quad f'(x) = 2 \cdot \frac{(1+x)^2 - x[2(1+x)]}{(1+x)^4} = 2 \cdot \frac{(1-x^2)}{(1+x)^4} \geq 0 \;\; se \;\; 1 - x^2 \geq 0,$

$x^2 - 1 \leq 0: \; -1 < x \leq 1$. Il grafico risulta crescente per $-1 < x < 1$, decrescente per:

$x < -1 \;\; vel \;\; x > 1$, punto di massimo relativo (e assoluto) $x = 1$, $M = \left(1; \frac{1}{2}\right)$.

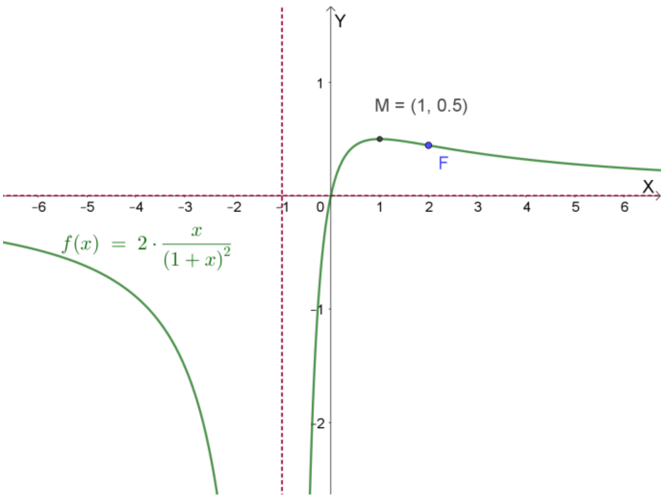
Studio della derivata seconda:

$f'(x) = 2 \cdot \frac{(1-x^2)}{(1+x)^4} = 2 \cdot \frac{1-x}{(1+x)^3}$; $\; f''(x) = 2 \cdot \frac{-(1+x)^3 - (1-x)[3(1+x)^2]}{(1+x)^6} \geq 0 \; se$:

$-(1+x) - 3(1-x) \geq 0$, $\quad 2x - 4 \geq 0,$ $\quad x \geq 2$. $Quindi$:

il grafico ha la concavità verso l'alto per $x > 2$, verso il basso per $x < 2 \;\; con \;\; x \neq -1$.
$x = 2$ punto di flesso: $F = \left(2; \frac{4}{9}\right)$.

Grafico della funzione:



Con la collaborazione di Angela Santamaria