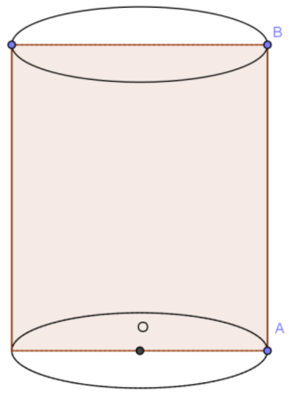
LICEO SCIENTIFICO SUPPLETIVA 1999 - PROBLEMA 2

Si deve costruire un recipiente a forma di cilindro circolare retto che abbia una capacità di $16\pi\ cm^3$.
a) Il candidato determini le dimensioni del recipiente che richiederanno la quantità minima di materiale.
b) Verificato che il cilindro cercato è quello equilatero, si determinino la superficie ed il volume della sfera ad esso circoscritta.
c) Considerate infine le formule: $V = \frac{4}{3}\pi x^3$ e $S = \pi x^2$, che danno rispettivamente il volume di una sfera di raggio x e l'area di un cerchio sempre di raggio x se ne illustrino i risultati della derivazione rispetto a x.

a)

Si chiede di trovare la **superficie totale minima di un cilindro circolare retto di dato volume**.



$V = 16\pi\ cm^3$

Risulta: $V = \pi \cdot \overline{OA}^2 \cdot \overline{AB}$

Poniamo $\boldsymbol{\overline{OA} = x}$ **(in cm) con x>0**

$$\overline{AB} = \frac{V}{\pi \cdot \overline{OA}^2} = \frac{16\pi}{\pi \cdot x^2} = \frac{16}{x^2}$$

$$S_{TOT} = S_{LAT} + 2S_{BASE} = 2\pi Rh + 2\pi R^2$$

$$S_{TOT} = 2\pi x \cdot \frac{16}{x^2} + 2\pi x^2 = \frac{32\pi}{x} + 2\pi x^2$$

$$S'_{TOT} = -\frac{32\pi}{x^2} + 4\pi x = \frac{4\pi x^3 - 32\pi}{x^2}$$

S'_{TOT} =0 se $x^3 = 8$ da cui $x = 2 = \overline{OA} = R$
S'_{TOT} >0 se $x > 2$
Quindi la funzione S_{TOT} (continua e derivabile per x>0), è crescente per $\boldsymbol{x} > 2$
Decrescente per $\mathbf{0} < \boldsymbol{x} < 2$**,** perciò ha un minimo assoluto in $\boldsymbol{x} = 2$.

Per tale valore di x risulta: $\overline{AB} = \frac{16}{x^2} = \frac{16}{4} = 4 = 2\overline{OA}$.

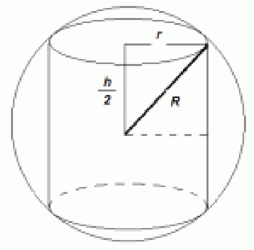
Il cilindro che richiederà la quantità minima di materiale ha raggio 2 cm e altezza 4cm.

b)

Verificato che il cilindro cercato è quello equilatero, si determinino la superficie ed il volume della sfera ad esso circoscritta.

Essendo l'altezza il doppio del raggio di base si tratta quindi del cilindro equilatero: *tra tutti i cilindri circolari retti di dato volume quello equilatero ha superficie totale minima.*

Dobbiamo ora calcolare la superficie ed il volume della sfera circoscritta al cilindro.



Il diametro di base $2r$ del cilindro equilatero è uguale all'altezza h, quindi $r = \frac{h}{2}$. Detto R il raggio della sfera circoscritta al cilindro si ha:

$R^2 = r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = r^2 + r^2 = 2r^2$, $R = r\sqrt{2} = 2\sqrt{2}\ cm = raggio\ sfera$.

$S(sfera) = 4\pi R^2 = 4\pi(8) = 32\ \pi\ cm^2 = S(sfera)$

$V(sfera) = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\left(2\sqrt{2}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi\left(16\sqrt{2}\ \right) = \frac{64}{3}\pi\ cm^3 = V(sfera)$.

c)

Considerate infine le formule: $V = \frac{4}{3}\pi x^3$ *e* $S = \pi x^2$, *che danno rispettivamente il volume di una sfera di raggio* x *e l'area di un cerchio sempre di raggio* x *se ne illustrino i risultati della derivazione rispetto a* x.

$V' = 4\pi x^2 = S(sfera\ di\ raggio\ x)$.

La derivata del volume di una sfera di raggio x rappresenta la superficie della sfera stessa.

$S' = 2\pi x = lunghezza\ circonferenza\ di\ raggio\ x$.

La derivata dell'area di un cerchio di raggio x rappresenta la lunghezza della circonferenza di raggio x.

Con la collaborazione di Angela Santamaria