LICEO SCIENTIFICO SUPPLETIVA 1999 - PROBLEMA 3

L'informazione che si ha della parabola $f(x) = ax^2 + bx + c$ è tutta concentrata nel punto di ascissa $x = 5$ ed è:

$$f(5) = 0, \quad f'(5) = -1 \quad e \quad f''(5) = -2$$

a) determinata la parabola e detti A e B i suoi punti d'intersezione con l'asse x calcolare l'area del triangolo ABC ove con C si è denotato il punto d'incontro delle tangenti alla parabola in A e in B e stabilire il rapporto tra tale area e quella del segmento parabolico di base AB;

b) stabilire altresì il rapporto tra i volumi descritti dalle aree (*n.d.r. regioni*) prima considerate per effetto della loro rotazione completa attorno all'asse x.

a)

$f(x) = ax^2 + bx + c$, $f'(x) = 2ax + b$, $f''(x) = 2a$. Quindi:

$$\begin{cases} f(5) = 25a + 5b + c = 0, \\ f'(5) = 10a + b = -1 \\ f''(5) = 2a = -2 \end{cases} ; \begin{cases} c = -25a - 5b = 25 - 45 = -20, \\ b = -10a - 1 = 9 \\ a = -1 \end{cases}$$

La parabola ha quindi equazione: $y = f(x) = -x^2 + 9x - 20$.
Se $x = 0, y = -20$; se $y = 0$, $-x^2 + 9x - 20 = 0$, $x^2 - 9x + 20 = 0 : x_1 = 4$, $x_2 = 5$;
$A = (4; 0)$, $\quad B = (5; 0)$, $\quad D = (0; -20)$

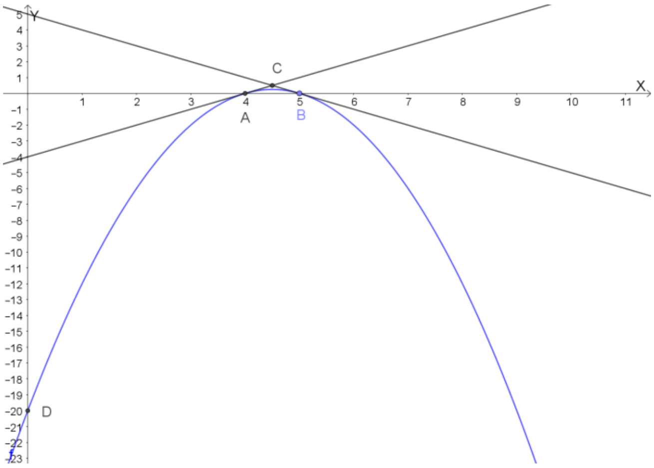
$x_V = -\frac{b}{2a} = \frac{9}{2}$; $y_V = f\left(\frac{9}{2}\right) = \frac{-81}{4} + \frac{81}{2} - 20 = \frac{1}{4}$. Quindi il vertice ha coordinate $V = \left(\frac{9}{2}; \frac{1}{4}\right)$.

Cerchiamo le equazioni delle tangenti alla parabola in A e B. $f'(x) = -2x + 9$;

$m_A = f'(4) = 1$; tangente in A: $y - y_A = m_A(x - x_A)$: $y = x - 4$

$m_B = f'(5) = -1$; tangente in B: $y - y_B = m_B(x - x_B)$: $y = -x + 5$

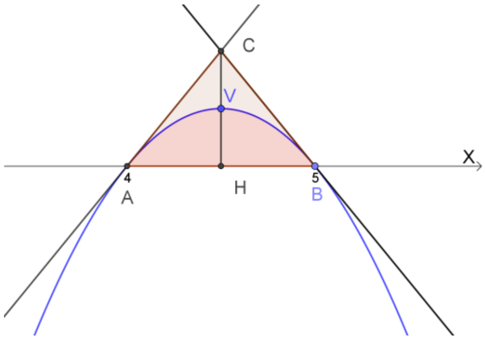
Rappresentiamo la parabola con le tangenti in A e B:



Il punto C, intersezioni fra le due tangenti, si ottiene risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} y = x - 4 \\ y = -x + 5 \end{cases} : \quad x - 4 = -x + 5\,; \quad x = \frac{9}{2}, \qquad y = \frac{9}{2} - 4 = \frac{1}{2}\,; \quad C = \left(\frac{9}{2}; \frac{1}{2}\right).$$

Rappresentiamo il segmento parabolico ABV ed il triangolo ABC:



$$Area(ABC) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CH = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$Area(segmento\ parabolico) = \frac{2}{3} \cdot AB \cdot VH = \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{Area(ABC)}{Area(segmento\ parabolico)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{4} \cdot 6 = \frac{3}{2}$$

b)

Stabilire altresì il rapporto tra i volumi descritti dalle aree (n.d.r. regioni) prima considerate per effetto della loro rotazione completa attorno all'asse x.

Il triangolo ABC genera due coni uguali con raggi di base CH e altezze AH=HB. Il volume di uno di questi due coni è:

$V(cono) = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi CH^2 \cdot AH = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{24}\pi$; somma dei due coni: $\frac{1}{12}\pi$.

Il volume generato dalla rotazione del segmento parabolico si ottiene calcolando il seguente integrale:

$$\pi\int_4^5 f^2(x)\,dx = \pi\int_4^5 (-x^2+9x-20)^2\,dx = \pi\int_4^5 (x^4-18x^3+121x^2-360x+400)\,dx =$$

$$= \pi\left[\frac{x^5}{5} - \frac{9}{2}x^4 + \frac{121}{3}x^3 - 180x^2 + 400x\right]_4^5 = \cdots = \pi\left(\frac{1}{30}\right) = \frac{\pi}{30}$$

Il rapporto fra i volumi richiesti è quindi:

$$\frac{\frac{1}{12}\pi}{\frac{\pi}{30}} = \frac{30}{12} = \frac{5}{2} = \mathit{rapporto\ fra\ i\ volumi}.$$

N.B.

Il testo che abbiamo fornito dà come dato $f''(5) = -2$; altri testi danno $f''(5) = -\frac{1}{2}$. In tal caso i risultati sono:

parabola: $y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{5}{4}$

$A = (1;0),\ \ B = (5;0),\qquad C = (3;2)$

$Area(ABC) = 4\ ;\ \ Area(segmento\ parabolico = \frac{8}{3};\quad \frac{Area(ABC)}{Area(segmento\ parabolico)} = \frac{3}{2}$

$$Rapporto\ volumi = \frac{5}{2}.$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria