QUESITO 1

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 2 \qquad \int_0^2 f(x)\,dx = -5$$

a) • $\int_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right)dx$; $\quad \frac{x}{2} = t \Rightarrow x = 2t \Rightarrow dx = 2dt$

$x = 0 \Rightarrow t = 0$

$x = 1 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$

$\int_0^{1/2} f(t)\cdot 2dt$ NON SI PUÓ CALCOLARE.

• $$\int_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right)dx = \int_0^1 f(t)\cdot 2dt = 2\int_0^1 f(t)\,dt = \boxed{4}$$

• $$\int_2^4 f\left(\frac{x}{2}\right)dx = \int_1^2 f(t)\cdot 2dt = 2\left(\int_1^0 f(t)\,dt + \int_0^2 f(t)\,dt\right) = 2\left(-\int_0^1 \ldots + \int_0^2 \ldots\right) = \boxed{-14}$$

• $\int_0^1 f(2x)\,dx$ $\qquad 2x = t \Rightarrow dx = \frac{1}{2}dt$

$x = 0 \Rightarrow t = 0$

$x = 1 \Rightarrow t = 2$

$$\int_0^2 \frac{1}{2} f(t)\,dt = \frac{1}{2}(-5) = \boxed{-\frac{5}{2}}$$

QUESITO 1

b) $f(x) = ax^3 + bx + c$ con $a \neq 0$

$$\int_0^1 (ax^3+bx+c)\,dx = 2; \quad \int_0^2 (ax^3+bx+c)\,dx = -5$$

$$\left[\frac{ax^4}{4} + \frac{bx^2}{2} + cx\right]_0^1 = 2 \Rightarrow \boxed{a+2b+4c=8}$$

(*)

$$\left[\quad \cdots \quad\right]_0^2 = -5 \Rightarrow \boxed{4a+2b+2c=-5}$$

Risolvendo il sistema (*) si ottiene

$$c = \frac{3a+13}{2} \qquad b = \frac{-7a-18}{2}$$

quindi

$$\boxed{y = ax^3 - \frac{7a+18}{2}x + \frac{3a+13}{2}} \quad (I)$$

c) $y' = 3ax^2 - \frac{7a+18}{2}$; $y'' = 6ax = 0$

per $x=0$ (tale condizione è suff. per il flesso della cubica):

$$F\left(0; \frac{3a+13}{2}\right)$$

Dimostriamo che la curva è simmetrica rispetto ad F:

$$\begin{cases} x = -x' \\ y = 3a + 13 - y' \end{cases}$$

sostituendo nella (I) si ottiene (a meno degli apici) la stessa equazione.

$\boxed{\text{N.B.}}$ Alla stessa conclusione si arriva notando che

$$y - \left(\frac{3a+13}{2}\right) = ax^3 - \frac{7a+18}{2}x$$

è dispari.

---

d) $y_F = -4 \Rightarrow \dfrac{3a+13}{2} = -4 \Rightarrow \boxed{a = -7}$

$$\boxed{y = -7x^3 + \frac{31}{2}x - 4}$$

e) Per la (I) risulta $y' = 0$ quando

$x^2 = \dfrac{7a+18}{6a}$; si hanno estremanti se $\dfrac{7a+18}{6a}$ è > 0 ovvero per $\boxed{a < -\frac{18}{7}}$ oppure $\boxed{a > 0}$