

M557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Tema di: MATEMATICA

1. Una parabola passante per A e B divide il triangolo ABC in due parti equivalenti. Supposto ABC equilatero di lato 3 cm e l'asse della parabola perpendicolare al segmento AB, in un conveniente sistema di riferimento si determinino:
- le coordinate di A, B e C;
 - l'equazione della parabola;
 - l'equazione del cerchio inscritto nel triangolo ABC.

2. Il candidato:

- illustri il teorema di *de L'Hôpital* e lo applichi per dimostrare che: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{e^x} = 0$;
- determini i valori dei parametri m ed n in modo che risulti:

$$\int_0^1 e^{mx+n} dx = \frac{e^n}{m}$$

e che l'integrale fra 1 e 2 della stessa funzione sia doppio dell'integrale precedente;

- interpreti geometricamente la questione posta sopra.

3. Si consideri la successione di termine generale $a_n = \frac{f(n)}{3^n}$, dove:

$$f(n) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n}$$

- Dimostrare che $f(n) = 2^n$.
- Determinare il più piccolo valore di n per cui risulta: $a_n < 10^{-10}$.
- Spiegare perché, se n è dispari, risulta:

$$f(n) = 2 \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{(n-1)/2} \right],$$

fornendo la dimostrazione di ogni eventuale formula cui si fa ricorso.

Scrivere un'espressione equivalente di $f(n)$ quando n è pari.

- Calcolare $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ e, ricorrendo alla definizione, verificare il limite così trovato.
- Esiste $\lim_{n \rightarrow 10^{10}} a_n$? Motivare esaurientemente la risposta.

La prova richiede lo svolgimento di due soli temi, scelti tra i tre proposti.

Durata massima della prova: 5 ore.

È consentito l'uso della calcolatrice tascabile non programmabile e la consultazione del vocabolario di italiano.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.