LICEO SCIENTIFICO SUPPLETIVA 2000 - PROBLEMA 1

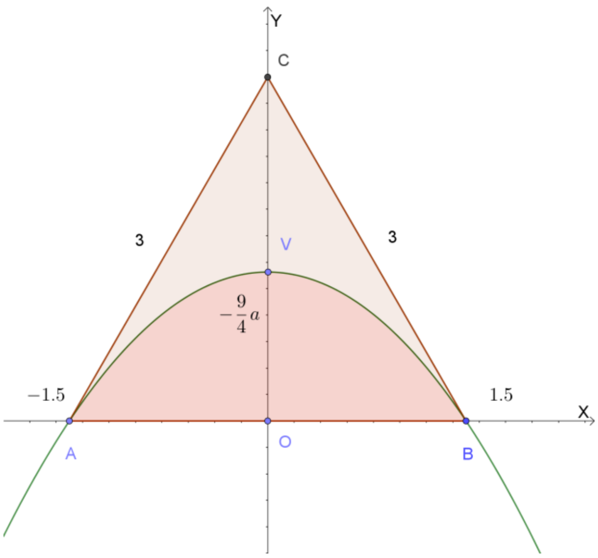
Una parabola passante per A e B divide il triangolo ABC in due parti equivalenti. Supposto ABC equilatero di lato 3 cm e l'asse della parabola perpendicolare al segmento AB, in un conveniente sistema di riferimento si determinino:

a. *le coordinate di A, B e C;*
b. *l'equazione della parabola;*
c. *l'equazione del cerchio inscritto nel triangolo ABC.*

a)

Fissiamo il sistema di riferimento in modo che A e B abbiano le seguenti coordinate: $A=(-1.5;0)=\left(-\frac{3}{2};\ 0\right)$ *e* $B=(1.5;0)=\left(\frac{3}{2};\ 0\right)$. Cerchiamo le coordinate di C, che appartiene all'asse y:

Risulta: $CO=3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$, quindi $C=\left(0;\ \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$.



b)

Determiniamo l'equazione della parabola passante per A e B che divide il triangolo ABC in due parti equivalenti.

La parabola ha equazione del tipo: $y=a\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right)=a\left(x^2-\frac{9}{4}\right),\ con\ a<0$.

Il vertice della parabola appartiene all'asse y, quindi si ottiene per $x=0$, $perciò:\ \ y_V=-\frac{9}{4}a$.

L’area del segmento parabolico ABV, per il teorema di Archimede, è uguale a:

$\frac{2}{3} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{OV} = \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot \left(-\frac{9}{4}a\right) = -\frac{9}{2}\,a\,.$

L’area del triangolo ABC è uguale a: $3 \cdot \frac{3}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{4}\sqrt{3}\,.$ Quindi deve essere:

$-\frac{9}{2}\,a = \left(\frac{9}{4}\sqrt{3} - \left(-\frac{9}{2}\,a\right)\right) = \left(\frac{9}{4}\sqrt{3} + \frac{9}{2}\,a\right);\; -\frac{18}{2}\,a = \frac{9}{4}\sqrt{3}\,;\; a = -\frac{\sqrt{3}}{4}\,.$

La parabola ha quindi equazione: $y = a\left(x^2 - \frac{9}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{4}\left(x^2 - \frac{9}{4}\right).$

c)

Determiniamo l’equazione del cerchio inscritto nel triangolo ABC.

Ricordiamo che per ogni poligono circoscritto ad una circonferenza vale la relazione:

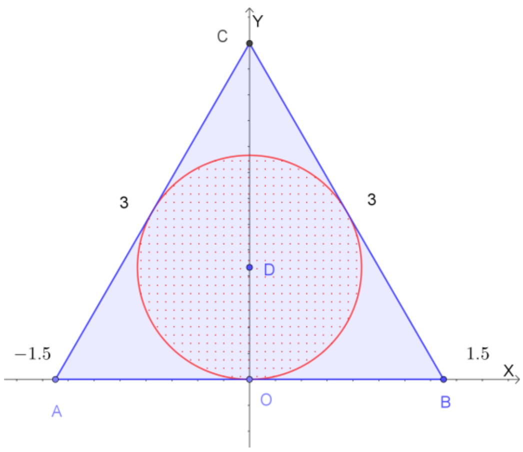
$A = pR,$ essendo A l’area del poligono, p il suo semiperimetro ed R il raggio della circonferenza. Quindi:

$$R = \frac{A}{p} = \frac{\frac{9}{4}\sqrt{3}}{\frac{9}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

Per questioni di simmetria il centro della circonferenza ha coordinate: $\left(0;\, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$

La circonferenza inscritta nel triangolo ha quindi equazione:

$$x^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}\;;\; x^2 + y^2 - \sqrt{3}\,y = 0$$



Con la collaborazione di Angela Santamaria