LICEO SCIENTIFICO SUPPLETIVA 2000 - PROBLEMA 2

Il candidato:

a) *Illustri il teorema di de L'Hôpital e lo applichi per dimostrare che:* $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4}{e^x}=0$.

b) *Determini i valori dei parametri m ed n in modo che risulti:*

$$\int_0^1 e^{mx+n}\,dx=\frac{e^n}{m}$$

e che l'integrale fra 1 e 2 della stessa funzione sia doppio dell'integrale precedente;

c) *interpreti geometricamente la questione posta sopra.*

a)

Il Teorema di De l'Hôpital[1] permette, sotto determinate condizioni, di calcolare il limite del quoziente di funzioni che si presenta nelle forme indeterminate $\left[\frac{0}{0}\right]$ oppure $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ (oppure riconducibili ad una di queste due forme indeterminate).

Enunciato:

Si considerino le funzioni f(x) e g(x), continue nell'intervallo chiuso [a; b] e derivabili in (a;b) , eccetto al più in x=c dell'intervallo (a;b), con $-\infty\le a<b\le+\infty$ e $g'(x)\neq 0$ per $x\neq c$.
Si abbia:

$\lim_{x\to c} f(x)=\lim_{x\to c} g(x)=0$ $oppure$ $\lim_{x\to c} f(x)=\lim_{x\to c} g(x)=\infty$. **Se esiste** il $\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l$ $(finito\ o\ infinito)$ allora si ha $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=l$.

N.B. Il Teorema (con qualche variante nell'enunciato) si può estendere anche al caso in cui si abbia $c=\pm\infty$.

[1] (*Matematico francese del XVII secolo, che lo pubblicò per la prima volta nel suo libro Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes (1696). È stato in seguito provato che la regola è da attribuirsi a Johann Bernoulli, suo insegnante e corrispondente; di conseguenza viene talora chiamata regola di Bernoulli: fonte wikipedia*)

Osserviamo che la non esistenza del $\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, non implica la non esistenza del

$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$.

($Esempio$: $f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$ e $g(x)=\sin x$; il limite $\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ non esiste, mentre il $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$ $esiste$).

Il teorema di De l'Hôpital a volte si divide in due Teoremi, uno per la forma indeterminata $\left[\frac{0}{0}\right]$ e uno per la forma indeterminata $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Diamo l'enunciato di questi due Teoremi.

Primo teorema di De l'Hôpital

Siano f(x) e g(x) due funzioni definite in un intorno I del punto x=c (escluso al più c) e siano soddisfatte le seguenti condizioni:

1) $\lim_{x\to c} f(x)=\lim_{x\to c} g(x)=0$
2) f(x) e g(x) siano continue in I, derivabili in I (escluso al più x=c)
3) Risulti $g'(x)\neq 0$ in I (escluso al più x=c)
4) Esiste il limite: $\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l\ \ (finito\ o\ infinito)$

In tali ipotesi esiste anche il limite $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$ e risulta uguale ad *l*.

N.B. Il Teorema si può estendere anche al caso in cui si abbia $c=\pm\infty$; infatti basta porre $x=\frac{1}{z}$, così $z\to 0$ ed applicare il teorema alle funzioni $f\left(\frac{1}{z}\right)$ $g\left(\frac{1}{z}\right)$.

Secondo teorema di De l'Hôpital

Siano f(x) e g(x) due funzioni definite in un intorno I del punto x=c (escluso al più c) e siano soddisfatte le seguenti condizioni:

1) $\lim_{x\to c} f(x)=\lim_{x\to c} g(x)=\infty$
2) f(x) e g(x) siano derivabili in I (escluso al più x=c)
3) Risulti $g'(x)\neq 0$ in I (escluso al più x=c)
4) Esiste il limite: $\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l\ \ (finito\ o\ infinito)$

In tali ipotesi esiste anche il limite $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$ e risulta uguale ad *l*.

N.B. Anche in questo caso il Teorema si può estendere anche al caso in cui si abbia $c=\pm\infty$; infatti basta porre $x=\frac{1}{z}$, così $z\to 0$ ed applicare il teorema alle funzioni $f\left(\frac{1}{z}\right)$ $g\left(\frac{1}{z}\right)$.

Verifichiamo ora, servendoci della Regola di De l'Hôpital (dopo averne verificato le condizioni di applicabilità) che: $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4}{e^x} = 0$.

Osserviamo che il limite presenta la forma indeterminata $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Le funzioni $f(x) = x^4$ e $g(x) = e^x$ sono continue e derivabili su tutto R, inoltre $g'(x) = e^x$ non si annulla mai. Sono quindi verificate le ipotesi del Teorema di De l'Hôpital.

Calcoliamo il limite del rapporto delle derivate di f e g:

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x^3}{e^x}$. Proseguendo altre 3 volte (le ipotesi del Teorema sono sempre verificate) si arriva a:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{24}{e^x} = 0^+ \quad c.v.d.$$

b)

Determini i valori dei parametri m ed n in modo che risulti:

$$\int_0^1 e^{mx+n}\ dx = \frac{e^n}{m}$$

e che l'integrale fra 1 e 2 della stessa funzione sia doppio dell'integrale precedente;

Calcoliamo l'integrale indefinito:

$\int e^{mx+n}\ dx = \frac{1}{m}\ e^{mx+n} + k$. Quindi: $\int_0^1 e^{mx+n}\ dx = \left[\frac{1}{m}\ e^{mx+n}\right]_0^1 = \frac{1}{m}\ e^{m+n} - \frac{1}{m}\ e^n$

Deve essere:

$$\frac{1}{m}\ e^{m+n} - \frac{1}{m}\ e^n = \frac{e^n}{m}, \quad \frac{1}{m}\ e^{m+n} = 2\cdot\frac{e^n}{m}, \quad e^{m+n} = 2\ e^n, \qquad e^m e^n = 2\ e^n,$$

$e^m = 2$, $m = \ln(2)$.

Verifichiamo ora che: $\int_1^2 e^{mx+n}\ dx = 2\cdot\frac{e^n}{m}$

$$\int_1^2 e^{mx+n}\ dx = \left[\frac{1}{m}\ e^{mx+n}\right]_1^2 = \frac{1}{m}\ e^{2m+n} - \frac{1}{m}\ e^{m+n} = \frac{1}{m}e^n(e^{2m} - e^m)$$

Ricordando che $e^m = 2$, avremo: $\frac{1}{m}e^n(e^{2m} - e^m) = \frac{1}{m}e^n e^m(e^m - 1) =$

$= \frac{1}{m}e^n \cdot 2(2-1) = 2 \cdot \frac{e^n}{m} = 2\int_0^1 e^{mx+n}$: c.v.d.

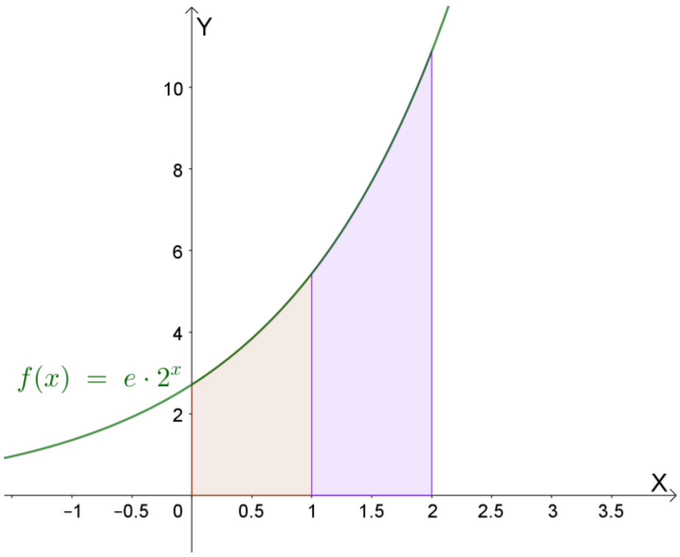
c)

Interpretiamo geometricamente la questione posta sopra.

Il significato geometrico della questione proposta è il seguente:

l'area della regione di piano delimitata dall'asse x, dall'asse y, dalla retta di equazione x=1 e dal grafico della funzione di equazione $f(x) = e^{mx+n}$, quando $m = \ln(2)$ è il doppio dell'area della regione di piano delimitata dall'asse x, dalle rette di equazioni x=1 e x=2 e dal grafico della stessa funzione.

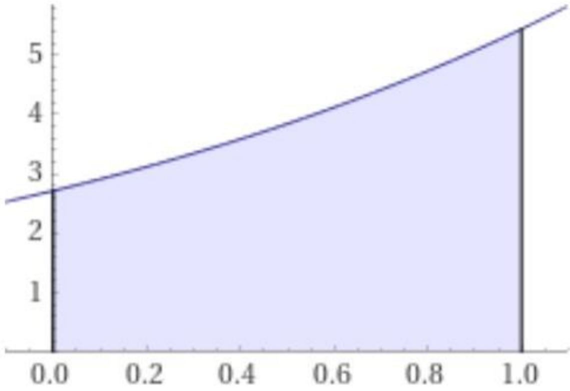
Visualizziamo la proprietà graficamente considerando la funzione $f(x) = e^{mx+n}$ con $m = \ln(2)$ e (per esempio) con n=1: $f(x) = e^{mx+n} = e^{x\ln(2)+1} = \left(e^{\ln(2)}\right)^x \cdot e = (2)^x \cdot e. Quindi$:
$f(x) = e \cdot 2^x$.



La proprietà dimostrata ci dice che:

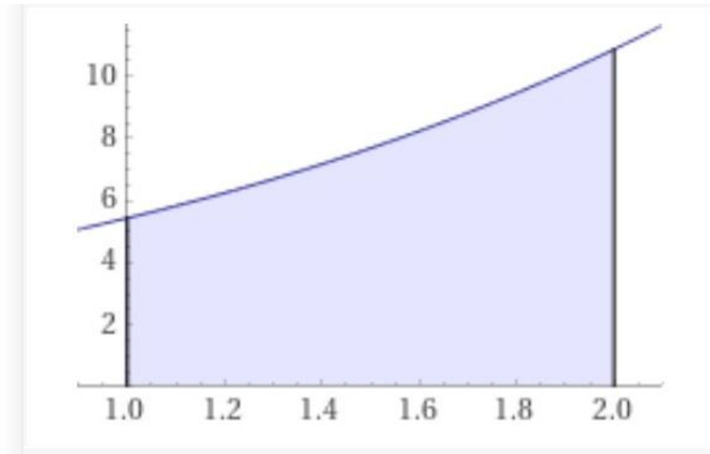
$$\int_0^1 e^{mx+n}\ dx = \frac{e^n}{m}, \qquad quindi: \int_0^1 e \cdot 2^x\ dx = \frac{e}{\ln(2)} \cong 3.92$$

Tale valore fornisce l'area della regione indicata nella figura seguente:



$$\int_1^2 e^{mx+n}\ dx = 2 \cdot \frac{e^n}{m}, \qquad quindi\text{:}\ \int_1^2 e \cdot 2^x\ dx = 2 \cdot \frac{e}{\ln(2)} \cong 7.84$$

Tale valore fornisce l'area della regione indicata nella figura seguente:



Con la collaborazione di Angela Santamaria