ORDINAMENTO 2001

QUESITO 1

Indicata con f(x) una funzione reale di variabile reale, si sa che $f(x) \longrightarrow l$ per x $\to$ a, essendo l ed a numeri reali. Dire se ciò è sufficiente per concludere che f(a) = l e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

Il limite $\lim_{x\to a} f(x) = l$ non implica *f(a)* = l: ciò è vero solo se la funzione è continua.

Potrebbe non esistere f(a) oppure esistere ma essere diverso dal limite.

QUESITO 2

Sia f(x) una funzione reale di variabile reale, continua nel campo reale, tale che f(0)=2. Calcolare:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x f(t)\,dt}{2x e^x}$$

dove e è la base dei logaritmi naturali.

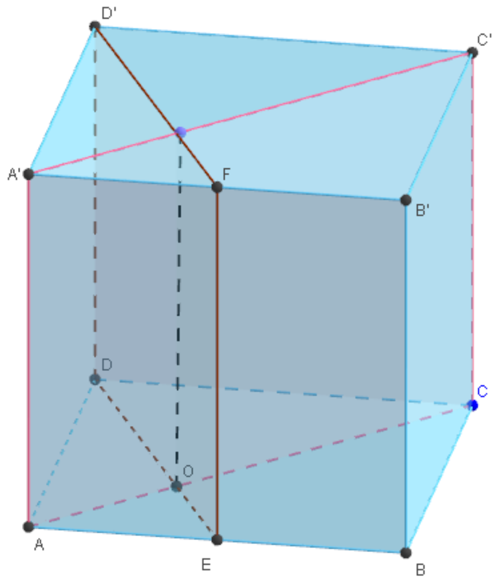
Applicando la regola di de L'Hôpital (di cui sono verificate le condizioni: il limite si presenta nella forma indeterminata 0/0, numeratore e denominatore sono funzioni continue e derivabili, la derivata del denominatore non si annulla in un intorno di x=0, 0 escluso) e tenendo presente il teorema di Torricelli (la derivata della funzione integrale è la funzione integranda), si ha:

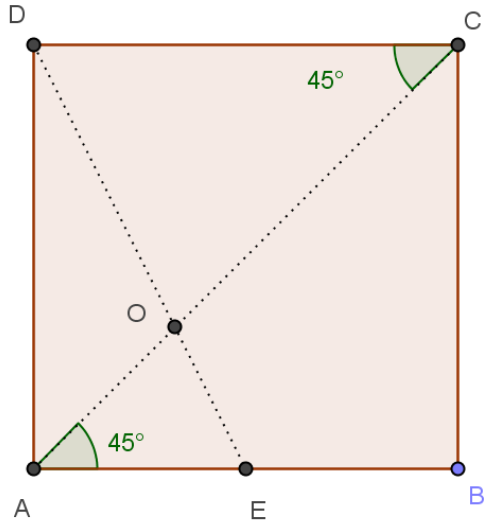
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{2e^x + 2xe^x} = \frac{2}{2} = 1$$

(si noti che, essendo f continua, risulta $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 2$)

QUESITO 3

Si consideri il cubo di spigoli AA', BB', CC', DD', in cui due facce opposte sono i quadrati ABCD e A'B'C'D'. Sia E il punto medio dello spigolo AB. I piani ACC'A' e D'DE dividono il cubo in quattro parti. Dimostrare che la parte più estesa è il quintuplo di quella meno estesa.





Le quattro parti sono prismi di altezza uguale (AA') e basi le quattro parti in cui il quadrato ABCD resta diviso da DE ed AC. Poniamo per comodità lo spigolo del cubo uguale a 2; risulta: $AE = 1$, $DE = \sqrt{5}$.

Il triangolo AEO è simile al triangolo DOC ed essendo $AE = \frac{1}{2}CD$, risulta: $AO = \frac{1}{2}OC$

Essendo AC=$2\sqrt{2}$ risulta $AO = \frac{1}{3}OC = \frac{1}{3}\left(2\sqrt{2}\right)$, quindi $OC = 2AO = \frac{4}{3}\sqrt{2}$.

Calcoliamo le aree di base dei quattro prismi in cui è diviso il cubo:

$$Area(AOE) = \frac{1}{2} \cdot (AO \cdot AE \cdot sen\ 45°) = \frac{1}{3}$$

$$Area(DOC) = \frac{1}{2} \cdot (DC \cdot CO \cdot sen\ 45°) = \frac{4}{3}$$

$$Area(AED) = \frac{1}{2} \cdot (AE \cdot AD) = 1 \quad \Longrightarrow \quad Area(AOD) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$Area(CBEO) = 4 - \frac{2}{3} - \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = \frac{5}{3} = 5Area(AEO)$$

Quindi, siccome il volume di un prisma è dato da $V = \frac{1}{3}Area(base) \cdot h$, avendo i quattro prismi la stessa altezza il rapporto fra i volumi è uguale al rapporto fra le aree di base. Siccome

$$Area(CBEO) = 5Area(AEO)$$

il prisma più esteso ha il volume che è il quintuplo del volume del prisma meno esteso.

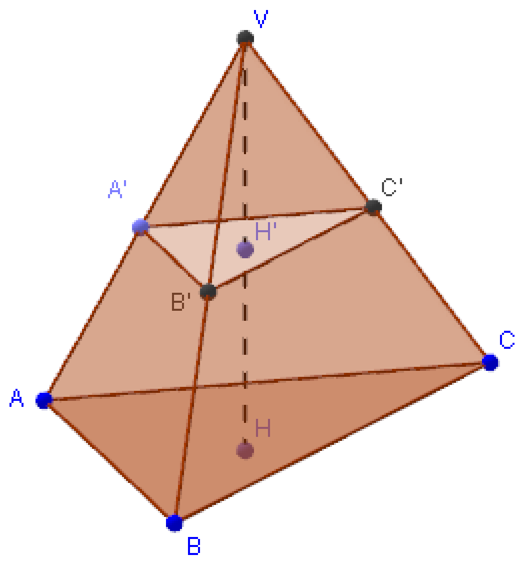
QUESITO 4

Un tronco di piramide ha basi di aree B e b ed altezza h. Dimostrare, col metodo preferito, che il suo volume V è espresso dalla seguente formula:

$$V = \frac{1}{3}h\left(B + b + \sqrt{Bb}\right).$$

In ogni caso esplicitare ciò che si ammette ai fini della dimostrazione.

Il volume del tronco di piramide si può determinare per via geometrica come differenza tra i volumi delle due piramidi ABCV e A'B'C'V (l'argomento è trattato da qualsiasi testo di geometria).



QUESITO 5

Sia f(x) una funzione reale di variabile reale, derivabile in un intervallo [a;b] e tale che, per ogni x di tale intervallo, risulti f '(x) = 0. Dimostrare che f(x) è costante in quell'intervallo.

Si tratta di un noto corollario del teorema di Lagrange, trattato in tutti i libri di Analisi.

QUESITO 6

Dimostrare che si ha:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

dove n, k sono numeri naturali qualsiasi, con $n > k > 0$.

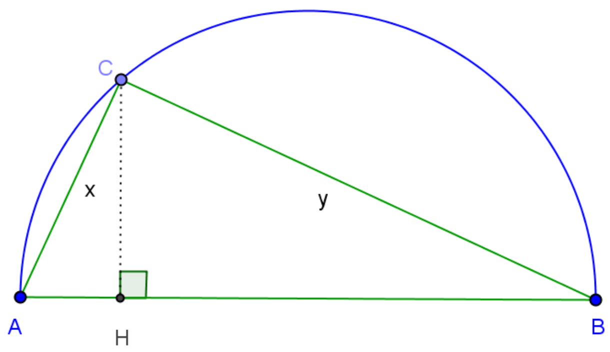
Si tratta di una nota proprietà dei coefficienti binomiali (formula di Stiefel) che si verifica facilmente sviluppando i tre coefficienti binomiali (anche questa proprietà è presente su qualsiasi libro di testo che tratta il Calcolo combinatorio).

QUESITO 7

Fra i triangoli inscritti in un semicerchio quello isoscele ha:

a) *area massima e perimetro massimo;*
b) *area massima e perimetro minimo;*
c) *area minima e perimetro massimo;*
d) *area minima e perimetro minimo.*

Una sola risposta è corretta: individuarla e darne un'esauriente spiegazione.



$$Area(ABC) = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CH}}{2}$$

Tale area è massima quando CH è massima, cioè quando CH è uguale al raggio della circonferenza (la base AB è costante). Quando CH=R il triangolo è isoscele (AC=BC).

Analizziamo adesso il perimetro.

Risulta: $x^2 + y^2 = 4R^2$, da cui $(x + y)^2 = 4R^2 + 2xy$.
Il perimetro del triangolo è massimo se lo è x+y, ovvero $(x + y)^2$, ovvero $4R^2 + 2xy$: essendo $4R^2$costante, il massimo si ha quando xy è massimo; ma xy è il doppio dell'area, quindi xy è massimo se x=y.

Pertanto il triangolo isoscele inscritto nella circonferenza ha area massima e perimetro massimo (risposta a).

QUESITO 8

Considerata la funzione:

$$f(x) = ax^3 + 2ax^2 - 3x$$

dove a è un parametro reale non nullo, determinare i valori di a per cui essa ha un massimo e un minimo relativi e quelli per cui non ha punti estremanti.

Siccome la f è continua e derivabile su tutto R, per avere estremanti relativi è necessario che si annulli la derivata prima:

$$f'(x) = 3ax^2 + 4ax - 3 = 0$$

1) Se $\frac{\Delta}{4} > 0$ avremo un massimo ed un minimo relativi (f'(x) ha due radici reali e distinte, quindi è positiva per valori esterni o interni ad un intervallo):
$$\frac{\Delta}{4} = 4a^2 + 9a < 0 \;\; se \;\; a < -\frac{9}{4} \;\; oppure \;\; a > 0$$

2) Se $\frac{\Delta}{4} \leq 0$ non ci sono estremanti (f'(x) è positiva o nulla oppure negativa o nulla, quindi f sarà sempre crescente o decrescente: $-\frac{9}{4} \leq a < 0$

QUESITO 9

Il limite della funzione $\frac{sen\,x - \cos x}{x}$, quando x tende a +∞,

a) è uguale a 0;
b) è uguale ad 1;
c) è un valore diverso dai due precedenti;
d) non è determinato.

Una sola risposta è corretta: individuarla e darne un'esauriente spiegazione.

Quando x tende a +∞, (sen x – cos x) non ammette limite ma è limitata tra due numeri reali A e B, 1/x tende a zero.
Quindi possiamo scrivere:

$$\boldsymbol{A \cdot \frac{1}{x} \leq \frac{1}{x}(sen\,x - cos\,x) \leq B \cdot \frac{1}{x}}$$

Per il "teorema del confronto", essendo gli estremi della disuguaglianza infinitesimi, si ha che la funzione $\frac{sen\,x - \cos x}{x}$ tende a zero quando x tende a +∞: risposta a.

QUESITO 10

Si consideri la funzione $\frac{x + sen\,x}{x - \cos x}$. Stabilire se si può calcolarne il limite per x→+∞ e spiegare se il calcolo può essere effettuato ricorrendo al teorema di De L'Hôpital.

Il limite esiste e vale 1:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x + sen\, x}{x - \cos x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1 + \frac{sen\, x}{x}\right)}{x\left(1 - \frac{cos\, x}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(1 + \frac{sen\, x}{x}\right)}{\left(1 - \frac{cos\, x}{x}\right)} = \frac{1+0}{1+0} = 1$$

Si noti che $\frac{sen\, x}{x}$ e $\frac{cos\, x}{x}$ tendono a zero per il teorema del confronto.

Il limite non può essere calcolato mediante il Teorema di de L'Hôpital poiché non esiste il limite del rapporto delle derivate:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1 + cos\, x}{1 + senx} = non\ esiste$$

Notiamo infatti che sen x e cos x, quando x tende a +∞, non ammettono limite ed oscillano tra -1 ed 1; quindi sia $(1 + cos\, x)$ sia $(1 + sen\, x)$ non ammettono limite.