A. S. 2000/2001

M557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1.

Si consideri la seguente relazione tra le variabili reali x, y:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{a},$$

dove a è un parametro reale positivo.

a) Esprimere y in funzione di x e studiare la funzione così ottenuta, disegnandone il grafico in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy).
b) Determinare per quali valori di a la curva disegnata risulta tangente o secante alla retta t di equazione x+y=4.
c) Scrivere l'equazione della circonferenza k che ha il centro nel punto di coordinate (1,1) e intercetta sulla retta t una corda di lunghezza $2\sqrt{2}$.
d) Calcolare le aree delle due regioni finite di piano in cui il cerchio delimitato da k è diviso dalla retta t.
e) Determinare per quale valore del parametro a il grafico, di cui al precedente punto a), risulta tangente alla circonferenza k.

PROBLEMA 2.

Considerato un qualunque triangolo ABC, siano D ed E due punti interni al lato BC tali che:

$$\overline{BD}=\overline{DE}=\overline{EC}.$$

Siano poi M ed N i punti medi rispettivamente dei segmenti AD ed AE.

a) Dimostrare che il quadrilatero DENM è la quarta parte del triangolo ABC.
b) Ammesso che l'area del quadrilatero DENM sia $\frac{45}{2}a^2$, dove *a* è una lunghezza assegnata, e ammesso che l'angolo $A\hat{B}C$ sia acuto e si abbia inoltre: $\overline{AB}=13a$, $\overline{BC}=15a$, verificare che tale quadrilatero risulta essere un trapezio rettangolo.
c) Dopo aver riferito il piano della figura, di cui al precedente punto b), ad un conveniente sistema di assi cartesiani, trovare l'equazione della parabola, avente l'asse perpendicolare alla retta BC e passante per i punti M, N, C.
d) Calcolare, infine, le aree delle regioni in cui tale parabola divide il triangolo ADC.

A. S. 2000/2001

M557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO.

1. Indicata con f(x) una funzione reale di variabile reale, si sa che f(x) $\to l$ per x $\to a$, essendo l ed a numeri reali. Dire se ciò è sufficiente per concludere che f(a) = l e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.
2. Sia f(x) una funzione reale di variabile reale, continua nel campo reale, tale che f(0)=2. Calcolare:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x f(t)\,dt}{2x e^x},$$

dove e è la base dei logaritmi naturali.

3. Si consideri il cubo di spigoli AA', BB', CC', DD', in cui due facce opposte sono i quadrati ABCD e A'B'C'D'. Sia E il punto medio dello spigolo AB. I piani ACC'A' e D'DE dividono il cubo in quattro parti. Dimostrare che la parte più estesa è il quintuplo di quella meno estesa.

4. Un tronco di piramide ha basi di aree B e b ed altezza h. Dimostrare, col metodo preferito, che il suo volume V è espresso dalla seguente formula:

$$V = \frac{1}{3}h\left(B + b + \sqrt{Bb}\right).$$

In ogni caso esplicitare ciò che si ammette ai fini della dimostrazione.

5. Sia f(x) una funzione reale di variabile reale, derivabile in un intervallo [a,b] e tale che, per ogni x di tale intervallo, risulti f '(x) = 0. Dimostrare che f(x) è costante in quell'intervallo.

6. Dimostrare che si ha:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

dove n, k sono numeri naturali qualsiasi, con $n > k > 0$.

7. Fra i triangoli inscritti in un semicerchio quello isoscele ha:
   a) area massima e perimetro massimo;
   b) area massima e perimetro minimo;
   c) area minima e perimetro massimo;
   d) area minima e perimetro minimo.

   Una sola risposta è corretta: individuarla e darne un'esauriente spiegazione.

A. S. 2000/2001

M557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Tema di: MATEMATICA

8. Considerata la funzione:

$$f(x) = a\,x^3 + 2\,a\,x^2 - 3\,x\,,$$

dove a è un parametro reale non nullo, determinare i valori di a per cui essa ha un massimo e un minimo relativi e quelli per cui non ha punti estremanti.

9. Il limite della funzione $\dfrac{\operatorname{sen} x - \cos x}{x}$, quando x tende a $+\infty$,

   a) è uguale a 0;
   b) è uguale ad 1;
   c) è un valore diverso dai due precedenti;
   d) non è determinato.

   Una sola risposta è corretta: individuarla e darne un'esauriente spiegazione.

10. Si consideri la funzione $\dfrac{x + \operatorname{sen} x}{x - \cos x}$. Stabilire se si può calcolarne il limite per $x \to +\infty$ e spiegare se il calcolo può essere effettuato ricorrendo al teorema di De L'Hôpital.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.