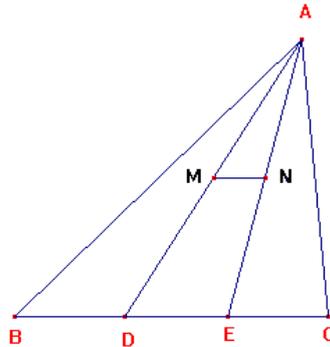


ORDINAMENTO 2001 - PROBLEMA 2

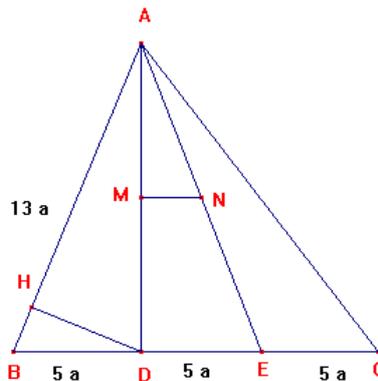
a)



Il segmento MN è parallelo a DE ed uguale alla sua metà (per una nota proprietà dei triangoli); l'altezza di AMN relativa alla base MN è metà di quella di ADE relativa a DE, quindi il triangolo AMN ha area uguale ad $1/4$ dell'area di ADE: l'area del quadrilatero DENM è quindi $3/4$ dell'area di ADE. Ma quest'ultima è $1/3$ dell'area di ABC, avendo la stessa altezza e base $1/3$: pertanto:

$$\text{Area (DENM)} = 3/4 \text{ Area (ADE)} = 3/4 (1/3 \text{ Area (ABC)}) = 1/4 \text{ Area (ABC)}$$

b)



primo modo: $\text{Area (ABD)} = 4/3 \text{ Area (DENM)} = 4/3 (45/2 a^2) = 30 a^2$

ma la stessa area si può trovare come $\frac{AB \cdot BD \cdot \text{sen}(B)}{2}$; confrontando i due

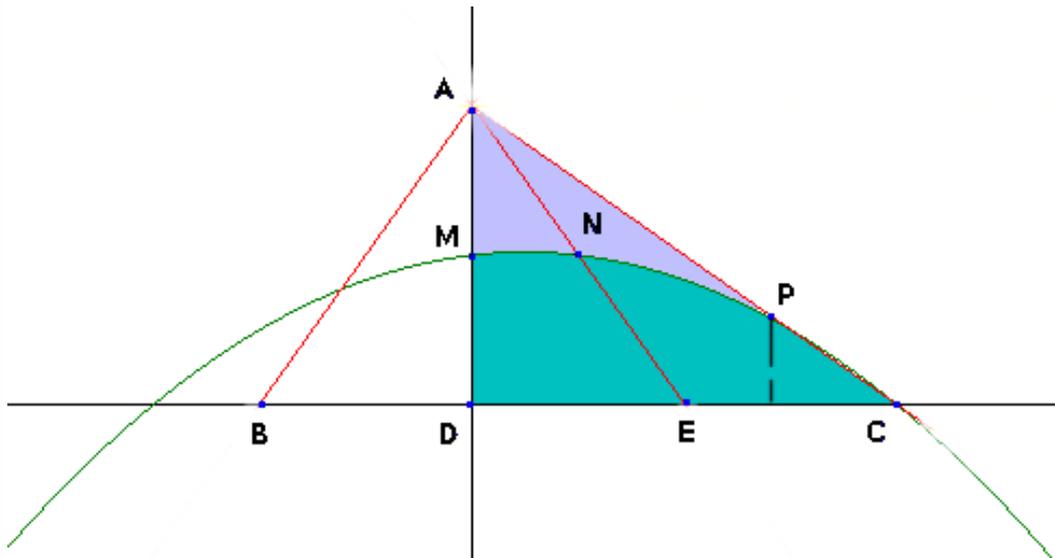
valori si ottiene $\text{sen}(B) = 12/13$; essendo l'angolo in B acuto si trova $\text{cos}(B) = 5/13$: ma questo è il rapporto tra BD e AB, quindi il triangolo ABD è retto in D.

secondo modo: applicando il teorema del coseno al triangolo ABD, dopo aver trovato $\text{cos}(B)$ trovo $AD = 12 a$; ma 13, 12 e 5 sono una terna pitagorica, quindi

il triangolo è rettangolo con AB ipotenusa.

terzo modo (geometrico): Nota l'area di ABD ($30 a^2$), trovo l'altezza DH del triangolo ABD (doppia area fratto base): $60/13 a$; applicando il tr. di Pitagora a BDH trovo BH ($25/13 a$); per differenza trovo AH ($144/13 a$); applicando Pitagora ad ADH trovo AD = 12 a: la conclusione è analoga a quella indicata nel secondo modo.

c)



A (0;12), B(-5;0), C(10;0), D(0;0), M(0;6), N(5/2; 6)

La parabola è del tipo $y = a x^2 + b x + c$; imponendo il passaggio per M, N e C si ottiene l'equazione: $y = -\frac{2}{25} x^2 + \frac{1}{5} x + 6$ che ha il vertice in V(5/4; 49/8)

Intersecando la parabola con la retta AC (di equazione $y = -\frac{6}{5} x + 12$) si ottiene il punto P(15/2; 3).

d)

Area regione AMNP =

$$\int_0^{15/2} \left(-\frac{6}{5} x + 12 + \frac{2}{25} x^2 - \frac{1}{5} x - 6 \right) dx = \left[\frac{2}{75} x^3 - \frac{7}{10} x^2 + 6x \right]_0^{15/2} = \frac{135}{8}$$

La seconda regione si ottiene per differenza tra l'area del triangolo ADC (uguale a 60) e quella appena trovata: $60 - 135/8 = 345/8$.

Nella figura seguente facciamo vedere un ingrandimento dell'intersezione tra la parabola e la retta AC (tra P e C l'arco di parabola è esterno al triangolo ACD):

