ORDINAMENTO 2002 - PROBLEMA 1

Consideriamo la curva k di equazione:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x^2+2}{x^3+2}}$$

a)

Determinare per quali valori di x la curva è situata nel semipiano y>0 e per quali nel semipiano y<0.

f(x)>0 se $\frac{x^2+2}{x^3+2} > \mathbf{0},\ \boldsymbol{x^3+2>0},\ \boldsymbol{x > -\sqrt[3]{2}}$
f(x)>0 se $\boldsymbol{x < -\sqrt[3]{2}}$

b)

La parabola richiesta è del tipo $y = ax^2 + bx + c$.
Passando per O, c=0.
La parabola deve tagliare ortogonalmente la curva k nel punto di ascissa x= -1.
Se x= -1 si ha f(-1)= 3: quindi la parabola deve passare per P(-1; 3).
La tangenti alle due curve in P devono essere ortogonali.
Il coefficiente angolare della tangente a k in x= -1 è f'(-1).

$f'(x) = \frac{4x-6x^2-x^4}{x^6+4x^3+4}$, quindi f'(-1)= -11

Il coefficiente angolare della tangente alla parabola in x= -1 è y'(-1); risulta: y'= 2ax+b, quindi y'(-1)= -2a+b. Le due curve sono quindi ortogonali in P se: $f'(-1) \cdot y'(-1) = -1$
Imponendo il passaggio della parabola per P abbiamo: 3 = a-b.
Pertanto i coefficienti della parabola devono soddisfare il seguente sistema:

$$\begin{cases} c = 0 \\ a - b = 3 \\ -2a + b = \frac{1}{11} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{34}{11} \\ b = -\frac{67}{11} \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{y = -\frac{34}{11}x^2 - \frac{67}{11}x}.$$

c)

Stabilire se la retta tangente a k in P ha in comune con k altri punti oltre a P.

La retta tangente a k in P ha equazione: $y = -11x - 8$

$$\begin{cases} y = -11x - 8 \\ y = \frac{x^2+2}{x^3+2} \end{cases} \implies \quad 11x^4 + 8x^3 + x^2 + 22x + 18 = 0$$

Scomponendo in fattori con Ruffini usando due volte la radice x= -1, si ottiene:

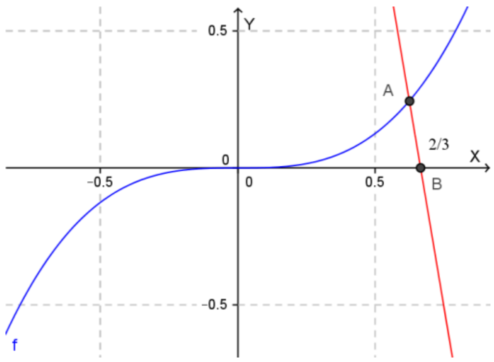
$(x-1)^2(11x^2 - 14x + 18) = 0$, da cui:
x=-1 (radice doppia), ascissa del punto di tangenza;
$11x^2 - 14x + 18 = 0$, nessuna soluzione.
Quindi tra k e la tangente in P non ci sono altri punti in comune oltre a quello di tangenza.

d)

Determinare in quanti punti k ha per tangente una retta parallela all'asse x.

Dobbiamo trovare i punti in cui f'(x)=0.

$f'(x) = 0, \qquad 4\,x - 6\,x^2 - x^4 = 0, -x(x^3 + 6x - 4) = 0$, da cui:
x=0
$x^3 + 6x - 4 = 0$; questa equazione si può studiare graficamente intersecando le due funzioni $y = x^3$ e $y = -6x + 4$.



Dal confronto grafico si deduce che l'equazione $x^3 + 6x - 4 = 0$ ha una soluzione reale compresa tra 0 e 2/3.
Quindi k ha per tangente una retta parallela all'asse x in due punti.

e)

Teorema di Lagrange.

Se f(x) è una funzione continua nell'intervallo chiuso e limitato [a; b] e derivabile nell'intervallo aperto (a; b), esiste almeno un punto c di (a;b) tale che:
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$
Nel nostro caso abbiamo l'intervallo $\left[-\sqrt{2}; 0\right]$ e la funzione $f(x) = \frac{x^2+2}{x^3+2}$.
La funzione non è definita in $x = -\sqrt[3]{2}$, che è interno all'intervallo dato, quindi cade la continuità nell'intervallo chiuso: il teorema di Lagrange **non è quindi applicabile** alla funzione data nell'intervallo assegnato.