ORDINAMENTO 2002 - PROBLEMA 2

Detta a una lunghezza nota non nulla ed x una lunghezza incognita, si considerino le seguenti lunghezze:

[1] a+2x, a-x, 2a-x

a)

Determinare per quali valori di x le tre lunghezze si possono considerare quelle dei lati di un triangolo non degenere.

x deve essere non negativo ed i tre valori indicati devono essere positivi:

$$\begin{cases} a+2x>0 \\ a-x>0 \\ 2a-x>0 \\ x\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \quad 0\leq x<a \text{ (2)}$$

Il lato maggiore deve essere a+2x, quindi, per la disuguaglianza triangolare deve essere:

$$\begin{cases} a+2x<(2a-x)+(a-x) \\ a+2x>(2a-x)-(a-x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<\frac{a}{2} \\ x>0 \end{cases} \Rightarrow \quad 0<x<\frac{a}{2} \quad (3)$$

Mettendo insieme la (2) e la (3) abbiamo: $\mathbf{0<x<\frac{a}{2}}$

b)

Determinare se, fra i triangoli non degeneri i cui lati hanno le lunghezze [1], ne esiste uno di area massima o minima.

L'area del triangolo può essere calcolata mediante la formula di Erone:

$A=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, dove p è il semiperimetro e a, b e c sono le misure dei lati del triangolo.

Nel nostro caso:

$2p=a+2x+a-x+2a-x=4a$, da cui $p=2a$
I lati del triangolo hanno lunghezze: a+2x, a-x e 2a-x. Quindi

$A=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{2a(a-2x)(a+x)x}$
Tale area è massima se lo è $2a(a-2x)(a+x)x$, cioè $y=(a-2x)(a+x)x$

(con $\boldsymbol{0} < \boldsymbol{x} < \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{2}}$).

La funzione è continua e derivabile nell'intervallo della x e risulta:

$y' = -6x^2 - 2ax + a^2 > 0$ se $\frac{-a-a\sqrt{7}}{6} < x < \frac{-a+a\sqrt{7}}{6}$ (con $\boldsymbol{0} < \boldsymbol{x} < \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{2}}$)

La funzione è crescente da 0 a $\frac{-a+a\sqrt{7}}{6}$ e decrescente da $\frac{-a+a\sqrt{7}}{6}$ ad $\frac{a}{2}$.

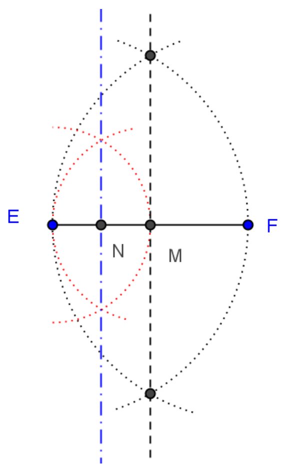
Quindi l'area è massima per $\boldsymbol{x = \frac{-a+a\sqrt{7}}{6} = \frac{a(\sqrt{7}-1)}{6}}$.

c)

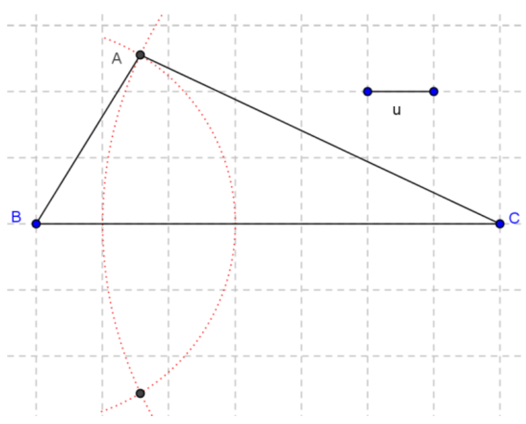
Verificare che per $x = \frac{a}{4}$ le [1] rappresentano le lunghezze dei lati di un triangolo, descriverne una costruzione geometrica con riga e compasso e stabilire se si tratta di un triangolo rettangolo, acutangolo o ottusangolo.

Siccome $0 < \frac{a}{4} < \frac{a}{2}$, per $x = \frac{a}{4}$ abbiamo un triangolo non degenere, i cui lati hanno lunghezze**:** $\boldsymbol{\frac{3}{2}a,\ \frac{3}{4}a,\ \frac{7}{4}a}$.

A partire dal segmento dato di lunghezza a costruiamo il segmento di lunghezza $\frac{a}{4}$: indicato con EF il segmento di lunghezza a, trovo il punto medio M di EF e poi il punto medio N di EM: il segmento EN ha misura $\frac{a}{4}$.



Posto EN=u, il triangolo richiesto ha le misure dei lati pari a 6u, 3u, 7u.
Per costruire il triangolo richiesto: costruiamo il segmento BC di lunghezza 7u; puntiamo il compasso in B con apertura 3u ed in C con apertura 6u: una delle intersezioni delle due circonferenze è il vertice A del triangolo richiesto.



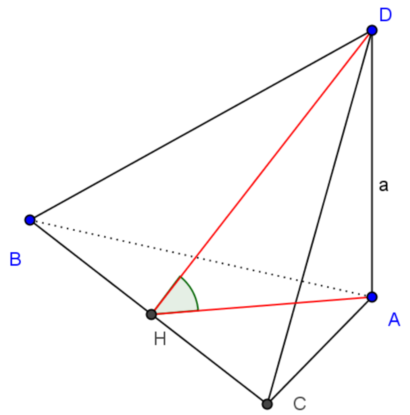
Dobbiamo ora stabilire se il triangolo è rettangolo, acutangolo oppure ottusangolo.

Calcoliamo il coseno dell'angolo in A mediante il teorema del coseno.

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos\hat{A}$, da cui:
$\cos\hat{A} = \frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB \cdot AC} = \cdots = -\frac{1}{9}$; pertanto l'angolo in A è ottuso: triangolo ottusangolo.

d)

AD=a, perpendicolare al piano di ABC. L'angolo tra i piani ABC e DBC è uguale all'angolo tra AH (perpendicolare a BC) e DH (perpendicolare a BC); per trovare tale angolo consideriamo il triangolo AHD rettangolo in A.



Risulta:

$tg\ D\hat{H}A = \frac{AD}{AH}$; $AH = \frac{2Area(ABC)}{BC}$; $Area(ABC) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot sen(\hat{A})$

Siccome $\cos\hat{A} = -\frac{1}{9}$, risulta $sen(\hat{A}) = \sqrt{\frac{80}{81}} = \frac{4}{9}\sqrt{5}$; quindi:

$Area(ABC) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot sen(\hat{A}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}a \cdot \frac{3}{2}a \cdot \frac{4}{9}\sqrt{5} = \frac{\sqrt{5}}{4}a^2$, pertanto:

$AH = \frac{2Area(ABC)}{BC} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{2}a^2}{\frac{7}{4}a} = \frac{2\sqrt{5}}{7}a$ ed infine:

$tg\ D\hat{H}A = \frac{AD}{AH} = \frac{a}{\frac{2\sqrt{5}}{7}a} = \frac{7\sqrt{5}}{10}$, quindi $D\hat{H}A = arctg\left(\frac{7\sqrt{5}}{10}\right) \implies D\hat{H}A \cong 57°$