Seconda prova scritta
SESSIONE SUPPLETIVA
ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
a.s. 2001/2002
CORSO DI ORDINAMENTO
Tema di MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1.

Se il polinomio f(x) si divide per $x^2 - 1$ si ottiene x come quoziente ed x come resto.

a) Determinare f(x).

b) Studiare la funzione $y = \frac{f(x)}{x^2 - 1}$

e disegnarne il grafico G in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), dopo aver trovato, in particolare, i suoi punti di massimo, minimo e flesso e i suoi asintoti.

c) Trovare l'equazione della retta t tangente a G nel suo punto di ascissa $\frac{1}{2}$.

d) Determinare le coordinate dei punti comuni alla retta t e alla curva G.

e) Dopo aver determinato i numeri a, b tali che sussista l'identità:

$$\frac{x}{x^2 - 1} = \frac{a}{x + 1} + \frac{b}{x - 1},$$

calcolare una primitiva della funzione $\frac{f(x)}{x^2 - 1}$.

PROBLEMA 2.

Una piramide di vertice V, avente per base il trapezio rettangolo ABCD, è tale che:
- il trapezio di base è circoscritto ad un semicerchio avente come diametro il lato AB perpendicolare alle basi del trapezio;
- lo spigolo VA è perpendicolare al piano di base della piramide;
- la faccia VBC della piramide forma un angolo di 45° col piano della base.

a) Indicato con E il punto medio del segmento AB, dimostrare che il triangolo CED è rettangolo.

b) Sapendo che l'altezza della piramide è lunga 2a, dove a è una lunghezza assegnata, e che BC=2AD, calcolare l'area e il perimetro del trapezio ABCD.

c) Determinare quindi l'altezza del prisma retto avente volume massimo, inscritto nella piramide in modo che una sua base sia contenuta nella base ABCD della piramide.

d) Stabilire se tale prisma ha anche la massima area laterale.

QUESTIONARIO.

1. Si consideri la seguente equazione in x, y:

$2x^2 + 2y^2 + x + y + k = 0$,

dove k è un parametro reale. La sua rappresentazione in un piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali:

A – è una circonferenza per ogni valore di k;

B – è una circonferenza solo per $k < \frac{1}{2}$;

C – è una circonferenza solo per $k < \frac{1}{4}$;

D – non è una circonferenza qualunque sia k.
Una sola alternativa è corretta: individuarla e giustificare la risposta.

2. Considerata la funzione di variabile reale: $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{1-x}$, dire se esiste il limite di f(x) per x tendente ad 1 e giustificare la risposta.

3. Sia f(x) una funzione reale di variabile reale. Si sa che: f(x) è derivabile su tutto l'asse reale; f(x)=0 solo per x=0; $f(x)\to 0$ per $x\to\pm\infty$; f '(x)=0 soltanto per x=-2 e x=1; f(-2)=1 ed f(1)=-2. Dire, dandone esauriente spiegazione, se le informazioni suddette sono sufficienti per determinare gli intervalli in cui la funzione è definita, quelli in cui è continua, quelli in cui è positiva, quelli in cui è negativa, quelli in cui cresce, quelli in cui decresce. Si può dire qualcosa circa i flessi di f(x) ?

4. Sia f(x) una funzione di variabile reale definita nel modo seguente:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{a}\text{sen}2x \quad \text{per} \quad 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{1+a}{\text{sen}\,x} \quad \text{per} \quad -\frac{\pi}{2} < x < 0 \end{cases}$$

.
.
.
dove a è un parametro reale non nullo. Stabilire se esiste una valore di a per il quale il dominio della funzione possa essere prolungato anche nel punto x=0.

5. Un titolo di borsa ha perso ieri l'x% del suo valore. Oggi quel titolo, guadagnando l'y%, è ritornato al valore che aveva ieri prima della perdita. Esprimere y in funzione di x.

6. Come si sa, la condizione che la funzione reale di variabile reale f(x) sia continua in un intervallo chiuso e limitato [a, b] è sufficiente per concludere che f(x) è integrabile su [a, b]. Fornire due esempi, non concettualmente equivalenti, che dimostrino come la condizione non sia necessaria.

7. Una primitiva della funzione $f(x) = \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x+4}$ è:

A) $\ln\frac{x}{x+2}$; B) $\ln\frac{x+2}{x}$; C) $\ln\sqrt{x^2+2x}$; D) $\ln\sqrt{2x^2+x}$.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire una spiegazione della scelta operata.

8. S_n rappresenta la somma dei primi n numeri naturali dispari. La successione di termine generale a_n tale che $a_n = \frac{S_n}{2n^2}$, è:

.
A) costante; B) crescente; C) decrescente.
Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire una spiegazione della scelta operata.

9. Dato un tetraedro regolare, si consideri il quadrilatero avente per vertici i punti medi degli spigoli di due facce. Dimostrare che si tratta di un quadrato.

10. Di due rette a, b - assegnate nello spazio ordinario - si sa soltanto che entrambe sono perpendicolari ad una stessa retta p.

a) È possibile che le rette a, b siano parallele?

b) È possibile che le rette a, b siano ortogonali?

c) Le rette a, b sono comunque parallele?

d) Le rette a, b sono comunque ortogonali?

Per ciascuna delle quattro domande motivare la relativa risposta.

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.

Non è ammesso lasciare l'aula degli esami prima che siano trascorse tre ore dalla dettatura del tema.