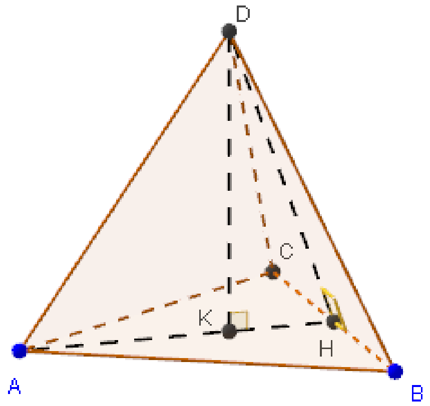
ORDINAMENTO 2003 - PROBLEMA 1

a)

Indichiamo con V il volume del tetraedro regolare T di vertici A,B,C e D e con S l'area totale di T; sia r il raggio della sfera inscritta in T.



Dobbiamo trovare il legame tra V, S ed r.

$$Area(ABC) = \frac{S}{4}$$

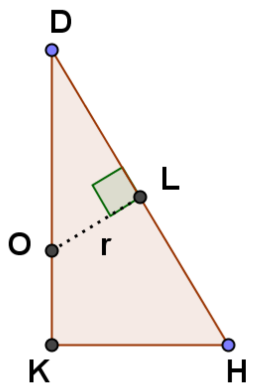
$$Area(ABC) = \frac{\overline{AB}^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{S}{4} \quad \Longrightarrow \quad \overline{AB} = \sqrt{\frac{S}{\sqrt{3}}}$$

$$\overline{DH} = \overline{BH} \cdot \sqrt{3} = \overline{AB} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{\frac{S}{\sqrt{3}}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Essendo K il baricentro del triangolo equilatero ABC, risulta: $\overline{HK} = \frac{1}{3}\overline{AH} = \frac{1}{3}\overline{DH} = \frac{1}{3}\left(\sqrt{\frac{S}{\sqrt{3}}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$$\overline{DK} = \sqrt{\overline{DH}^2 - \overline{KH}^2} = \sqrt{\frac{3S}{4\sqrt{3}} - \frac{3S}{36\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{2S}{3\sqrt{3}}}$$

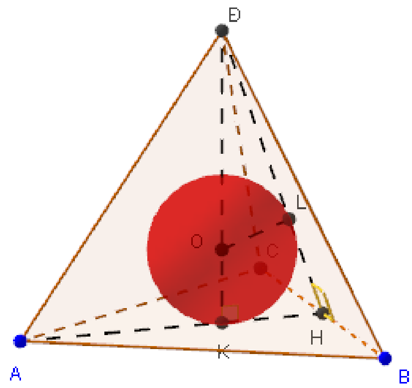
$$V = \frac{1}{3} \cdot Area(ABC) \cdot \overline{DK} = \frac{1}{3} \cdot \frac{S}{4} \cdot \sqrt{\frac{2S}{3\sqrt{3}}}$$



Determiniamo ora il raggio della sfera inscritta nel tetraedro. Il centro O della sfera è sull'altezza DK ed il raggio r è la distanza OL di O da DH ed anche OK.

Dalla similitudine dei triangoli DOL e DKH segue:

OL:OD=HK:DH ,   OL:(DK-OK)=HK:DH



$$r : \left(\sqrt{\frac{2S}{3\sqrt{3}}} - r\right) = \frac{1}{3}\left(\sqrt{\frac{S}{\sqrt{3}}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) : \sqrt{\frac{S}{\sqrt{3}}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

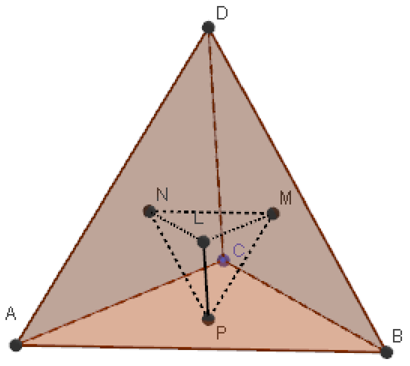
da cui, eseguendo i calcoli:

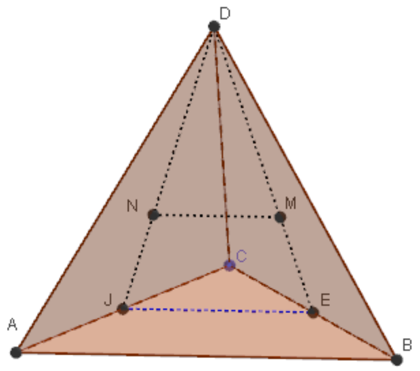
$r = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2S}{3\sqrt{3}}}$, quindi, essendo $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{S}{4} \cdot \sqrt{\frac{2S}{3\sqrt{3}}}$, risulta:

$$\boldsymbol{V = \frac{1}{3} \cdot r \cdot S}$$

b)

Consideriamo il tetraedro T’ (MNPL) avente per vertici i centri delle facce di T: *dobbiamo calcolare il rapporto tra le lunghezze degli spigoli di T e T’ ed il rapporto tra i volumi di T e T’.*





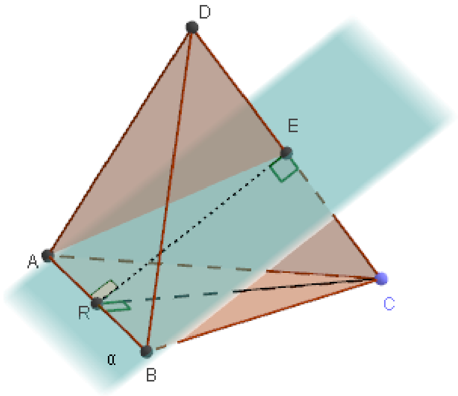
N ed M sono i baricentri dei triangoli ACD e BCD, quindi:
$DN = 2NJ$ da cui $DN = \frac{2}{3}DJ$; analogamente $DM = \frac{2}{3}DE$
Dalla similitudine fra i triangoli DEJ e DNM segue che $MN = \frac{2}{3}EJ$
Ma EJ= $\frac{1}{2}AB$ quindi $MN = \frac{1}{3}AB$, da cui $\frac{AB}{MN} = 3$, che è il rapporto tra gli spigoli di T e T’.

I due tetraedri T e T’ (entrambi regolari) sono simili, quindi il rapporto tra i loro volumi è il cubo del rapporto di similitudine (pari al rapporto tra gli spigoli):

$$\frac{V(T)}{V(T')} = 3^3 = 27$$

c)

Poniamo AB=s: dobbiamo calcolare la distanza del punto E (intersezione del piano con CD) dalla retta AB. E risulta essere il punto medio di CD e indicando con R la distanza di E dalla retta AB, R risulta il punto medio di AB.

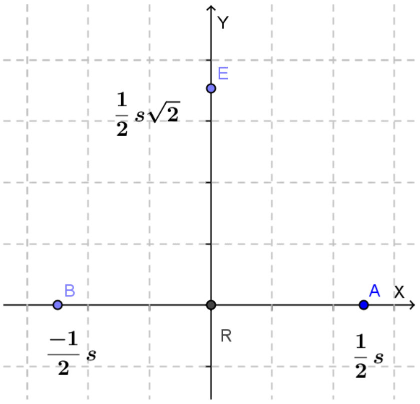


Il triangolo CER è rettangolo in E e CR è altezza del triangolo (equilatero) ABC, quindi:

$CR = s\frac{\sqrt{3}}{2}$, $EC = \frac{1}{2}s$, quindi: $ER = \sqrt{CR^2 - CE^2} = \sqrt{\frac{3}{4}s^2 - \frac{1}{4}s^2} = \frac{1}{2}s\sqrt{2}$

d)

Consideriamo il piano cartesiano in cui R è l'origine, AB è l'asse x ed ER è l'asse y. Siccome AB è lungo s, ed $ER = \frac{1}{2}s\sqrt{2}$, avremo le seguenti coordinate:



$R(0;0)$, $A\left(\frac{s}{2};0\right)$, $B\left(-\frac{s}{2};0\right)$, $E\left(0;\frac{1}{2}s\sqrt{2}\right)$.

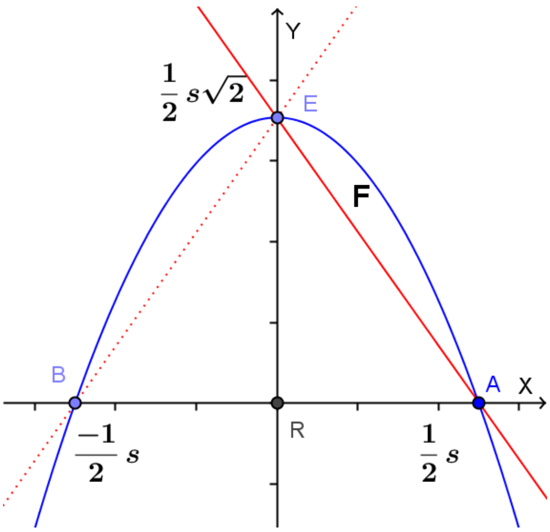
La parabola p richiesta ha equazione del tipo:

$$y = ax^2 + bx + c$$

E' sufficiente imporre che E sia il vertice e che la parabola passi (per esempio) per A.

Più velocemente si può trovare la parabola notando che è del tipo
$y = a\left(x - \frac{s}{2}\right)\left(x + \frac{s}{2}\right)$, passando per A e B, e imponendo il passaggio per E:
$$\frac{1}{2}s\sqrt{2} = a\left(-\frac{s^2}{4}\right) \quad \Longrightarrow \quad a = -\frac{2\sqrt{2}}{s}$$
Equazione parabola: $y = -\frac{2\sqrt{2}}{s}\left(x - \frac{s}{2}\right)\left(x + \frac{s}{2}\right)$, $\quad y = -\frac{2\sqrt{2}}{s}x^2 + \frac{1}{2}s\sqrt{2}$

e)



L'area della regione delimitata dalla parabola e dalla retta EA si può calcolare mediante l'integrale definito:

$$\int_0^{\frac{s}{2}}(parabola - retta\ EA)dx$$

o, più semplicemente, sottraendo all'area del segmento parabolico ABE l'area del triangolo ABE e dividendo per 2.

$$Area\ segm.par. = \frac{2}{3}\cdot AB\cdot ER = \cdots = s^2\frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$Area\ triang.ABC\ = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot ER = \cdots = \frac{1}{4}s^2\sqrt{2}$$

$$Area(F) = \frac{1}{2}\left(s^2\frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{4}s^2\sqrt{2}\right) = \frac{1}{2}s^2\frac{\sqrt{2}}{12} = s^2\frac{\sqrt{2}}{24}$$

$Area(F) = \frac{\sqrt{2}}{3}\ cm^2$ se $s^2\frac{\sqrt{2}}{24} = \frac{\sqrt{2}}{3}$ da cui $s = 2\sqrt{2}\ cm$