ORDINAMENTO 2003 - PROBLEMA 2

Sia f la funzione definita da: $\boldsymbol{f(x)=\frac{2x+1}{x^2+m+|m|}}$, con m parametro reale.
Notiamo che:

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{2x+1}{x^2} \quad se \quad m\le 0}$$

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{2x+1}{x^2+2m} \quad se \quad m> 0}$$

a)

Dominio

Se $\boldsymbol{m>0}$, $\quad x^2+2m\neq 0\ \ \forall x \in \Re$
Se $\boldsymbol{m\le 0}$, $\quad x^2\neq 0 \quad se \quad x\neq 0$

Derivabilità

Trattandosi di una funzione razionale fratta, dove esiste è derivabile.

b)

Se $\boldsymbol{m>0}$:
$\boldsymbol{f(x)=\frac{2x+1}{x^2+2m}}$, $\boldsymbol{f'(x)=\frac{-2x^2-2x+4m}{(x^2+2m)^2}}$, $\boldsymbol{f'(1)=0 \quad se -2-2+4m=0}$, $\boldsymbol{m=1}$

Se $\boldsymbol{m\le 0}$
$\boldsymbol{f(x)=\frac{2x+1}{x^2}}$, $\boldsymbol{f'(x)=-\frac{2\,(x+1)}{x^3}}$, $\boldsymbol{f'(1)=0 \quad se -4=0}$, $\boldsymbol{MAI}$

c)

La funzione da studiare si ottiene per m=1 ed ha equazione: $\boldsymbol{f(x)=\frac{2x+1}{x^2+2}}$

Dominio: $\boldsymbol{-\infty<x<+\infty}$

Intersezioni con gli assi: $\left(0;\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2};0\right)$

Eventuali simmetrie notevoli: $\boldsymbol{f(-x)=\frac{-2x+1}{x^2+2}}$, né pari né dispari.

Segno della funzione: y>0 se $x>-\frac{1}{2}$; $\ y<0 \ se \ \ x<-\frac{1}{2}$

Limiti agli estremi del dominio

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{x} = 0^{\pm}$

(quindi abbiamo y=0 è asintoto orizzontale per $x \to \pm\infty$; non ci sono altri asintoti).

Studio della derivata prima

La funzione $\boldsymbol{f(x) = \frac{2x+1}{x^2+2}}$ è continua e derivabile per ogni x.

$y' = \dfrac{-2x^2 - 2x + 4}{(x^2+2)^2}$

$y' = 0$ se $-2x^2 - 2x + 4 = 0,\ x = -2, x = 1\ \ (punti\ a\ tangente\ orizzontale)$

$y' > 0$ se $-2x^2 - 2x + 4 > 0 \implies -2 < x < 1$ (crescente)

$y' < 0$ se $x < -2$ oppure $x > 1$ (crescente)

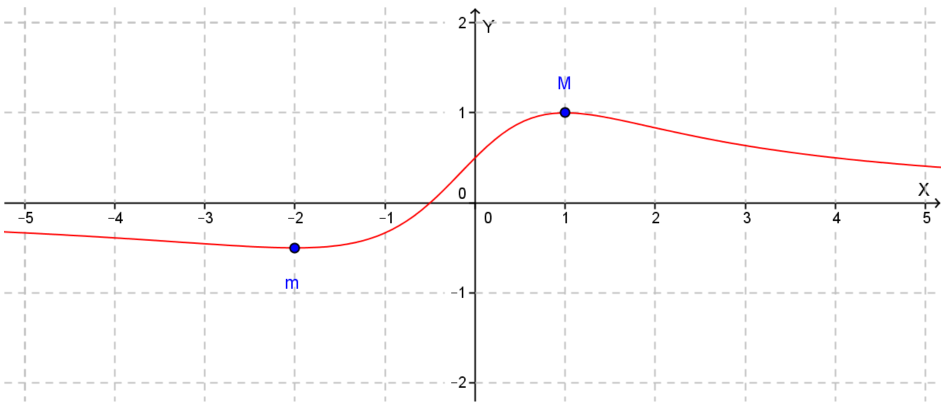
Minimo relativo $\left(-2; \frac{1}{2}\right)$ Massimo relativo $(1; 1)$

Studio della derivata seconda

$\boldsymbol{y''} = \dfrac{2\,(2\,x^3 + 3\,x^2 - 12\,x - 2)}{(x^2+2)^3}$

$y'' = 0$ se $2\,x^3 + 3\,x^2 - 12\,x - 2 = 0$: questa equazione ha almeno una soluzione reale (essendo un'equazione razionale intera di grado dispari) ed al massimo tre soluzioni reali; quindi ci sono da uno a tre flessi. Dallo studio precedente (limiti, massimi e minimi) si deduce che ci sono tre flessi: uno prima del minimo, uno tra il minimo ed il massimo ed uno dopo il massimo.

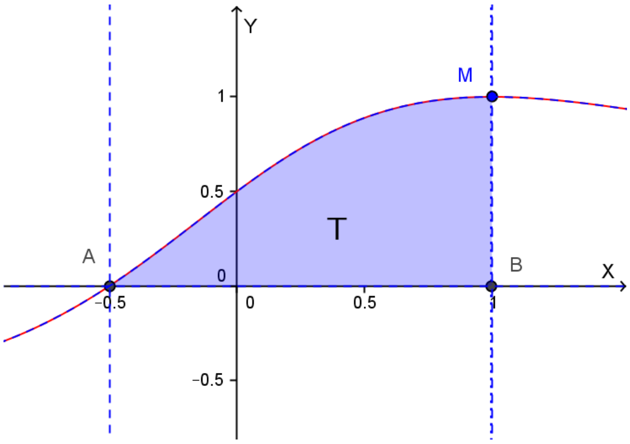
Grafico della funzione $\boldsymbol{f(x) = \frac{2x+1}{x^2+2}}$



Si noti che abbiamo un flesso per x<2, un altro tra -2 e 1 ed un terzo per x>1.

d)

Si chiede ora di calcolare l'area della regione finita di piano T delimitata dal grafico della funzione, dall'asse x e dalla retta di equazione x=1.



$$\boldsymbol{Area(T)} = \int_{-\frac{1}{2}}^{1} \frac{2x+1}{x^2+2}\,dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{1} \frac{2x}{x^2+2}\,dx +$$

$$+\int_{-\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{x^2+2}\,dx = [\ln(x^2+2)]_{-\frac{1}{2}}^{1} +$$

$$+\frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}\,dx = \ln(3) - ln\left(\frac{9}{4}\right) +$$

$$+\frac{\sqrt{2}}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{1} \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}\,dx = ln\left(\frac{4}{3}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\left[arctg\,\frac{x}{\sqrt{2}}\right]_{-\frac{1}{2}}^{1} =$$

$$= ln\left(\frac{4}{3}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(arctg\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - arctg\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\right) =$$

$$= ln\left(\frac{4}{3}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(arctg\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + arctg\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\right) =$$

$$= ln\left(\frac{4}{3}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}arctg\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}arctg\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \cong \mathbf{0.96\ u^2}$$