ORDINAMENTO 2004 - PROBLEMA 1

Sia f la funzione definita da: $\boldsymbol{f(x) = 2x - 3x^3}$

1)

Studiamo la funzione $\boldsymbol{f(x) = 2x - 3x^3}$
Dominio: $-\infty < \boldsymbol{x} < +\infty$

Intersezioni con gli assi:

x=0, y=0

y=0, $2x - 3x^3 = 0$, da cui $x = 0, x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$

Eventuali simmetrie notevoli:

f(-x)= - f(x): funzione dispari (simmetria rispetto all'origine degli assi).

Segno della funzione:

y>0 se $2x - 3x^3 > 0, x(2 - 3x^2) > 0\ x < -\sqrt{\frac{2}{3}}\quad ,\quad 0 < x < \sqrt{\frac{2}{3}}$

y<0 se -$\sqrt{\frac{2}{3}} < x < 0\quad ,\quad x > \sqrt{\frac{2}{3}}$

Limiti agli estremi del dominio: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$

Non ci sono asintoti, essendo una funzione razionale intera di terzo grado.

Studio della derivata prima: $\boldsymbol{y' = 2 - 9x^2}$

$y' = 0$ se $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{3}$ (punti a tangente orizzontale)

$y' > 0$ se $-\frac{\sqrt{2}}{3} < x < \frac{\sqrt{2}}{3}$ (crescente)

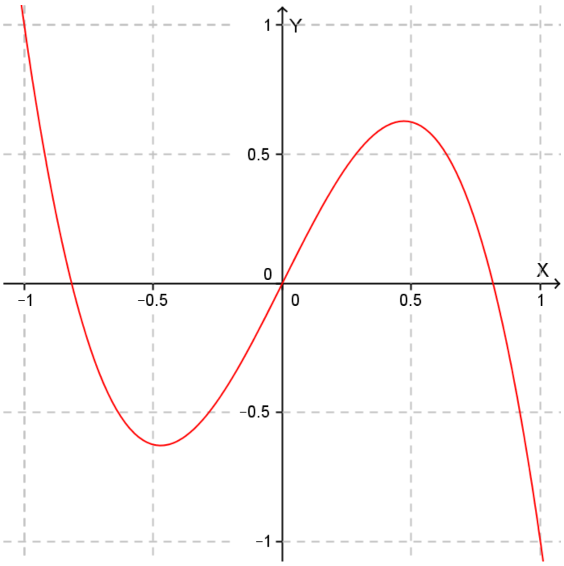
$y' < 0$ se $x < -\frac{\sqrt{2}}{3}$ oppure $x < \frac{\sqrt{2}}{3}$ (crescente)

Minimo relativo $\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}; -\frac{4\sqrt{2}}{9}\right)$ Massimo relativo $\left(\frac{\sqrt{2}}{3}; \frac{4\sqrt{2}}{9}\right)$

Studio della derivata seconda: $\boldsymbol{y' = -18x}$

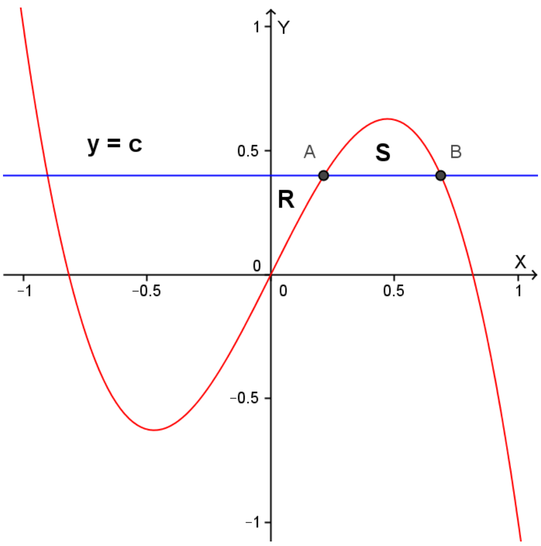
$y'' = 0$ se x=0
$y'' > 0$ se x<0 (concavità verso l'alto)
$y'' < 0$ se x>0 (concavità verso il basso). Quindi abbiamo un flesso in $(0; 0)$.

Grafico della funzione $\boldsymbol{f(x) = 2x - 3x^3}$



2)

Consideriamo le due regioni di piano R ed S.



La retta di equazione y=c interseca il grafico G di f in due punti distinti A e B del primo quadrante (in modo che R ed S siano equivalenti) se:

$0 < c < \frac{4\sqrt{2}}{9}$

3)

Indichiamo con $A = (a; c)\ e\ B = (b; c)$ i due punti di intersezione tra la retta e G.

Le ascisse di A e B hanno le seguenti limitazioni: $0 < a < \frac{\sqrt{2}}{3}$, $\frac{\sqrt{2}}{3} < b < \sqrt{\frac{2}{3}}$

Area(R)= $\int_0^a (c - 2x + 3x^3)dx = \left[\frac{3\,x^4}{4} + c\,x - x^2\right]_0^a = \frac{3\,a^4}{4} + c\,a - a^2$

Area(S)= $\int_a^b (2x - 3x^3 - c)dx = \left[-\frac{3\,x^4}{4} - c\,x + x^2\right]_0^a = -\frac{3b^4}{4} - bc + b^2 + \frac{3\,a^4}{4} + c\,a - a^2$

Le due aree sono uguali se:

$\frac{3\,a^4}{4} + c\,a - a^2 = -\frac{3b^4}{4} - bc + b^2 + \frac{3\,a^4}{4} + c\,a - a^2$ da cui

$-\frac{3b^4}{4} - bc + b^2 = 0,\ \ b\left(-\frac{3b^3}{4} - c + b\right) = 0$; b=0 non accettabile e $-\frac{3b^3}{4} - c + b = 0$
Poiché f(b)=c, $2b - 3b^3 = c$; quindi:

$$\begin{cases} -\frac{3b^3}{4} - c + b = 0 \\ 2b - 3b^3 = c \end{cases} \Longrightarrow -\frac{3b^3}{4} - 2b + 3b^3 + b = 0 \quad \Longrightarrow \frac{9b^3}{4} - b = 0$$ ed escludendo b=0 otteniamo $\frac{9b^2}{4} - 1 = 0 \Longrightarrow b = \pm\frac{2}{3}$, di cui è accettabile solo $\boldsymbol{b = \frac{2}{3}}$. Con tale valore di b otteniamo $\boldsymbol{c = \frac{4}{3}}$.
La retta richiesta ha quindi equazione: $\boldsymbol{y = \frac{4}{3}}$
Dobbiamo ora trovare le ascisse dei punti A e B.

$\begin{cases} y = \frac{4}{3} \\ y = 2x - 3x^3 \end{cases} \Longrightarrow 3x^3 - 2x + \frac{4}{3} = 0$. Siccome una radice è $x = b = \frac{2}{3}$, abbassando di grado con la regola di Ruffini otteniamo: $\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(3x^2 + 2x - \frac{2}{3}\right) = 0$
$3x^2 + 2x - \frac{2}{3} = 0 \Longrightarrow x = \frac{-\sqrt{3}-1}{3} < 0\ (non\ accettabile),\quad \boldsymbol{x = \frac{\sqrt{3}-1}{3}}\ accettabile$
Quindi le ascisse di A e B sono: $\boldsymbol{a = \frac{\sqrt{3}-1}{3}}$ **e** $\boldsymbol{b = \frac{2}{3}}$

4)

Dobbiamo trovare la simmetrica g di f rispetto alla retta $\boldsymbol{y = \frac{4}{9}}$.
Le equazioni della simmetria rispetto alla retta data sono:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = \frac{8}{9} - y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = \frac{8}{9} - y' \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x \to x \\ y \to \frac{8}{9} - y \end{cases}$$

La f quindi si trasforma in : $\frac{8}{9} - y = 2x - 3x^3 \Longrightarrow \boldsymbol{y = 3x^3 - 2x + \frac{8}{9} = g(x)}$.