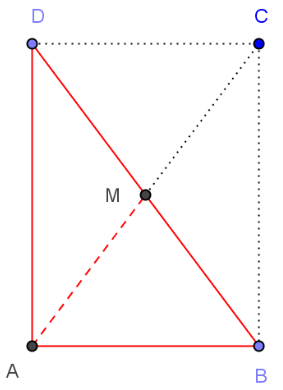
ORDINAMENTO 2004 - PROBLEMA 2

1)

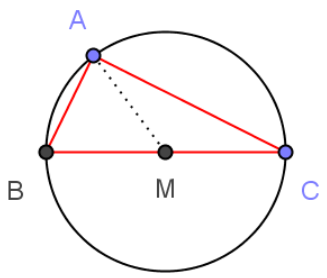
La mediana relativa all'ipotenusa di un triangolo rettangolo è la metà dell'ipotenusa stessa.

Primo metodo



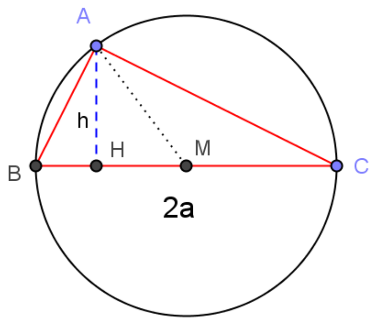
Un triangolo rettangolo può essere visto come la metà di un triangolo rettangolo. La mediana relativa all'ipotenusa è mezza diagonale e l'ipotenusa è l'altra diagonale del rettangolo. Poiché le diagonali del rettangolo sono uguali segue che la mediana AM relativa all'ipotenusa BD è la metà dell'ipotenusa stessa BD.

Secondo metodo



Consideriamo la circonferenza circoscritta al triangolo rettangolo ABC. Questa circonferenza ha come diametro l'ipotenusa BC (*un triangolo rettangolo è inscrittibile in una semicirconferenza di diametro uguale all'ipotenusa*).
Il centro M della circonferenza è il punto medio dell'ipotenusa BC. La mediana AM è un raggio, quindi AM è la metà di BC (diametro).

2)



Poniamo AH=h e BC=2a.

Dobbiamo esprimere i cateti AB e AC in funzione di a ed h.

$MH = \sqrt{a^2 - h^2}$ $BH = a - \sqrt{a^2 - h^2}$

$CH = a + \sqrt{a^2 - h^2}$ $\boldsymbol{AB} = \sqrt{AH^2 + BH^2} = \cdots =$

$= \sqrt{\boldsymbol{2a^2 - 2a\sqrt{a^2 - h^2}}}$

$\boldsymbol{AC} = \sqrt{AH^2 + CH^2} = \cdots = \sqrt{\boldsymbol{2a^2 + 2a\sqrt{a^2 - h^2}}}$

3)

$BC = \sqrt{3} \quad (in\ metri)$. Poniamo $AB = x, \quad 0 \le x \le \sqrt{3}$

Dobbiamo trovare il cono K di volume massimo che si ottiene dalla rotazione completa del triangolo ABC intorno ad uno dei suoi cateti (per esempio AB).

AB è l'altezza del cono e AC il suo raggio di base.

$\boldsymbol{AC} = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{3 - x^2}$

$Volume\ cono = \frac{1}{3}\pi \cdot\ AC^2 \cdot AB = V(x) = \frac{1}{3}\pi \cdot (3 - x^2) \cdot x = \frac{1}{3}\pi \cdot (3x - x^3)$
$V'(x) = \frac{1}{3}\pi \cdot (3 - 3x^2) = \pi \cdot (1 - x^2)$
$V'(x) = 0$ se $x = \pm 1 \qquad V'(x) > 0$ se $-1 < x < 1$
Siccome $0 \le x \le \sqrt{3}$ risulta $V'(x) > 0$ se $0 \le x < 1, \quad V'(x) < 0$ se $1 < x \le \sqrt{3}$

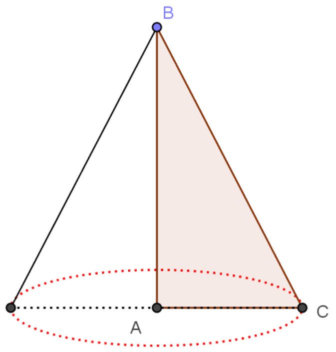
Quindi V(x) è massimo per x=1

$Volume\ massimo = \frac{1}{3}\pi \cdot (3x - x^3) = \frac{1}{3}\pi \cdot (3 - 1) = \frac{2}{3}\pi$ (in metri cubi)

Siccome $1\ m^3 = 1000\ l$ la capacità del cono K di volume massimo in litri è:

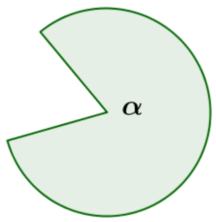
$Capacità\ in\ litri\ di\ K = \frac{2}{3}\pi \cdot 1000\ l \cong 2094\ l$

4)



$\mathrm{AB} = 1\ , \quad BC = \sqrt{3}\ , \ AC = \sqrt{2}$

Circonferenza di base= $2\pi\sqrt{2}$
Lo sviluppo laterale del cono è un settore circolare di raggio $BC = \sqrt{3}$ e arco di lunghezza $2\pi\sqrt{2}$.
La misura in radianti dell'angolo del settore circolare è:



$$\frac{lunghezza\ arco}{raggio} = \frac{2\pi\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cong \boldsymbol{5{,}13\ radianti}$$

La misura in gradi sessagesimali si ottiene dalla proporzione:
$\alpha°: \alpha = 360°: 2\pi$, da cui:

$$\alpha° = \frac{\alpha \cdot 360°}{2\pi} = \frac{360° \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cong \boldsymbol{294°}$$