ORDINAMENTO 2004

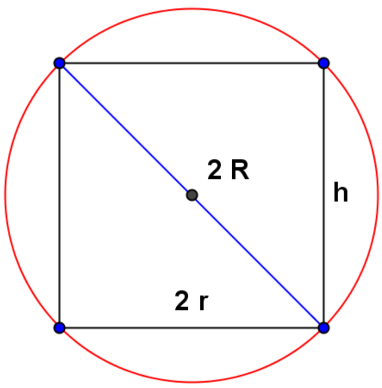
QUESITO 1

Cerchiamo due numeri reali **a** e **b** (diversi) che hanno somma e prodotto uguali.

$$\boldsymbol{a+b=a\cdot b} \quad (\boldsymbol{a\neq b})$$

Abbiamo $a(b-1)=a \implies a=\frac{b}{b-1} \quad (b\neq 1)$. Quindi, per esempio, **b=3 e a=3/2.**

QUESITO 2



$$h=2r;\, 2R=h\sqrt{2}=2r\sqrt{2} \implies \boldsymbol{R=r\sqrt{2}}$$

La superficie totale del cilindro è:

$$S_{cil}^{T}=2\,\pi rh+2\,\pi r^2=6\,\pi r^2$$

La superficie della sfera è:

$$S_{sfera}=4\,\pi R^2=8\,\pi r^2$$

Quindi il rapporto richiesto è:

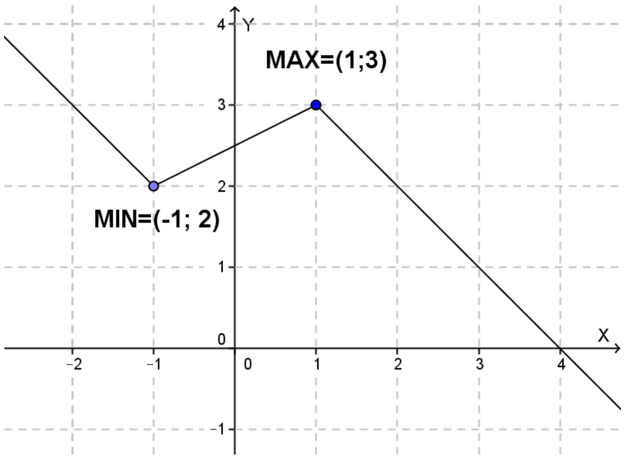
$$\frac{S_{cil}^{T}}{S_{sfera}}=\frac{6\,\pi r^2}{8\,\pi r^2}=\boldsymbol{\frac{3}{4}}$$

QUESITO 3

Un esempio di funzione f(x) con un massimo relativo in (1; 3) e minimo relativo in (-1; 2) è la seguente:

$$\boldsymbol{f(x)=\begin{cases} -x+1, & x\leq -1 \\ \frac{1}{2}x+\frac{5}{2}, & -1<x<1 \\ -x+4, & x\geq 1 \end{cases}}$$

Indichiamo il grafico della funzione f:

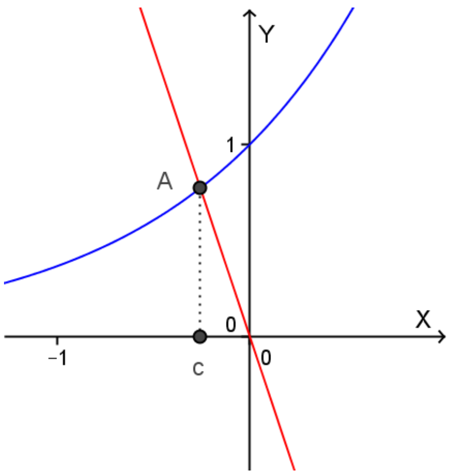


QUESITO 4

Consideriamo l'equazione: $\boldsymbol{e^x + 3x = 0}$.

L'equazione ammette una ed una sola soluzione reale.

A tal fine è sufficiente rappresentare nello stesso sistema di riferimento le curve di equazione:
$y = e^x$ e $y = -3x$ e notare che si intersecano una sola volta (per x<0).



OPPURE

Considero la funzione $\boldsymbol{f(x) = e^x + 3x}$
Risulta f(0) = 1 > 0, f(-1) = $e^{-1} - 3 < 0$
quindi per il *teorema degli zeri* applicato all'intervallo [- 1; 0] (in cui la funzione è continua), l'equazione ammette almeno una soluzione tra -1 e 0. Tale soluzione è unica poiché $\boldsymbol{f'(x) = e^x + 3 > 0}$ per ogni x, quindi la funzione è strettamente crescente.

N.B.

Per calcolare un valore approssimato della soluzione utilizziamo il *metodo delle tangenti*. Calcoliamo la derivata seconda della funzione per poter scegliere il punto iniziale dell'iterazione: $\boldsymbol{f''(x) = e^x > 0}$ per ogni x: siccome f''(x) ha lo stesso segno di f(b)=f(0)=1, il punto iniziale sarà a= -1.
La formula iterativa è:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

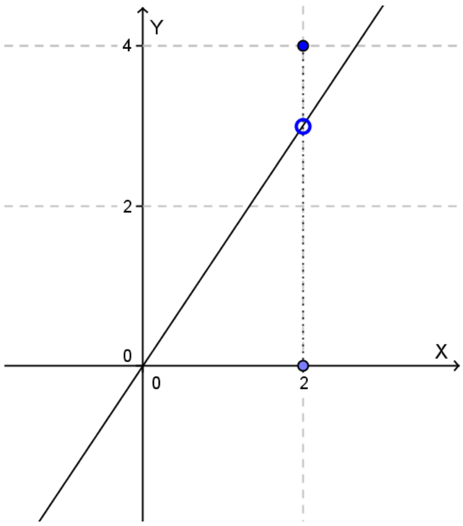
Che possiamo vedere nella forma $x \leftarrow x - \frac{e^x+3x}{e^x+3} = \frac{xe^x-e^x}{e^x+3} = \frac{e^x(x-1)}{e^x+3}$
Ponendo x=a= -1 in $\boldsymbol{x} \leftarrow \frac{e^x(x-1)}{e^x+3}$ otteniamo x_1 = - 0.2185
Per x= - 0.2185 otteniamo x_2 = - 0.2575
Per x= - 0.2575 otteniamo x_3 = - 0.2576
Per x= - 0.2576 otteniamo x_4 = - 0.2576
Quindi un valore approssimato è **- 0.257** a meno di un millesimo.

QUESITO 5

Un esempio di funzione con le caratteristiche richieste è la seguente:

$$\boldsymbol{g(x)} = \begin{cases} \frac{3}{2}x & x \neq 2 \\ 4 & x = 2 \end{cases}$$

Indichiamo il grafico della funzione g:



QUESITO 6

$f(x) = 3\log x \qquad g(x) = \log(2x)^3$

Dobbiamo verificare che le due funzioni hanno la stessa derivata e darne una giustificazione.

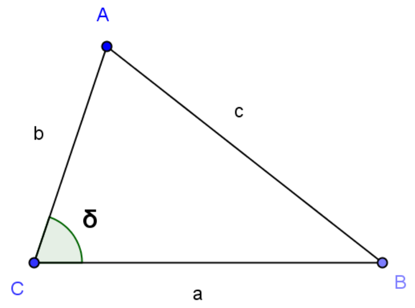
$f'(x) = \frac{3}{x} \quad g'(x) = \left(\frac{1}{(2x)^3}\right)[3(2x)^2 \cdot 2] = \frac{3}{x}$

Osserviamo che: $g(x) = \log(2x)^3 = 3log2x = 3(log2 + logx) = 3log2 + 3logx$
Quindi f(x) e g(x) differiscono per una costante, pertanto hanno la stessa derivata.

QUESITO 7

La richiesta si può enunciare nel modo seguente:

Tra tutti i triangoli di cui sono dati due lati e l'angolo compreso, trovare quello di area massima.



L'area S del triangolo può essere espressa da:

$$S = \frac{1}{2} ab \; sen \; \delta$$

Al variare di δ S è massima se $sen \; \delta = 1$, cioè se $\delta = \frac{\pi}{2}$, quindi **l'area massima si ha nel caso del triangolo rettangolo di cateti a e b.**

QUESITO 8

Il grado sessagesimale è definito come la novantesima parte dell'angolo retto.

Il grado centesimale è definito come la centesima parte dell'angolo retto.

La misura in radianti α di un angolo è definita come il rapporto tra la lunghezza dell'arco ℓ ed il raggio R individuati su una generica circonferenza con centro nel vertice dell'angolo dato: $\alpha = \frac{\ell}{R}$. Da questa definizione si deduce che 1 radiante corrisponde alla misura di quell'angolo al centro di una circonferenza a cui corrisponde un arco che, rettificato, ha la stessa lunghezza del raggio.

Tra la misura $\alpha°$ in gradi e la misura α in radianti dello stesso angolo sussiste la relazione:

$$\boldsymbol{\alpha° : \alpha = 180° : \pi}$$

Ponendo in questa relazione $\alpha = 1$ troviamo l'equivalente in gradi di 1 radiante:

$\alpha = 1 \; rad \quad \Longrightarrow \quad \alpha° =$ 57.29577951… $\cong 57°17'44'', 8$

QUESITO 9

Si chiede di calcolare il seguente integrale definito: $\int_0^1 arcsen(x)dx$.
Calcoliamo per parti una primitiva di $arcsen(x)$.

$$\int arcsen(x) \, dx = x \; arcsen(x) + \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx =$$

$= x\, arcsen(x) + \frac{1}{2}\int -2x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\, dx = x\, arcsen(x) + \frac{1}{2}\cdot\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} =$

$= \; x\, arcsen(x) + (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$

Quindi:

$\int_0^1 arcsen(x)dx = \left[\, x\, arcsen(x) + (1-x^2)^{\frac{1}{2}}\right]_0^1 = \boldsymbol{\frac{\pi}{2} - 1}$

QUESITO 10

Consideriamo i due insiemi: $A = \{1, 2, 3,\; 4\}\;\, e\;\, B = \{a, b, c\}$. Si chiede di determinare il numero delle applicazioni (funzioni) di A in B.

Tale numero corrisponde al numero delle disposizioni con ripetizioni di 3 oggetti (quelli del secondo insieme) a 4 a 4 (quelli del primo insieme), che è pari a $\mathbf{3^4 = 81}$.

Nel nostro caso abbiamo le seguenti possibilità:

L’1 può andare in a, b, c. Lo stesso per il 2, il 3 ed il 4. Quindi i casi possibili sono:

3x3x3x3 = 3^4 = 81.