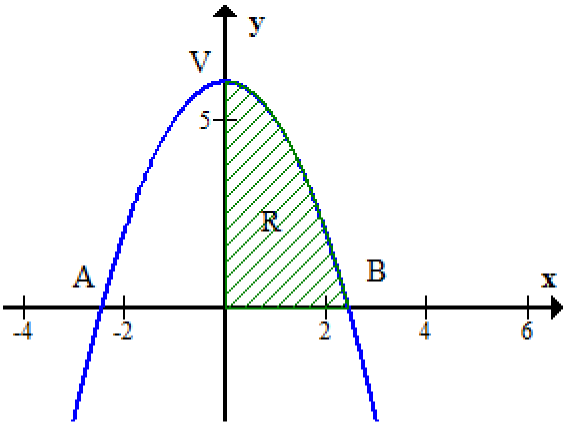
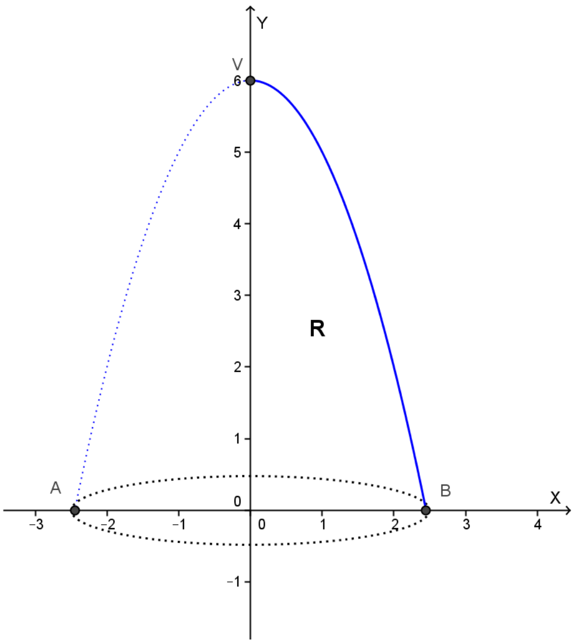
ORDINAMENTO 2005 - PROBLEMA 1

λ: $y = 6 - x^2$;

Rappresentiamo nel piano cartesiano la regione R finita del primo quadrante delimitata dagli assi coordinati e dalla parabola λ (il vertice e le intersezioni con l'asse x sono $V = (0; 6)$, $A = (-\sqrt{6}; 0)$, $B = (\sqrt{6}; 0)$).



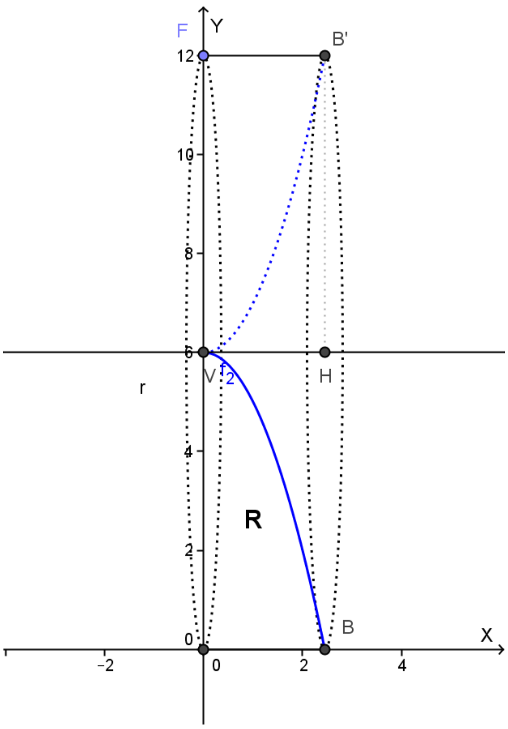
1)



Il volume del solido generato dalla rotazione completa di R intorno all'asse y si ottiene calcolando il seguente integrale:

$$\pi \int_0^6 x^2 dy = \pi \int_0^6 (6 - y) dy = \left[-\frac{y^2}{2} + 6\, y \right]_0^6 =$$
$$= \mathbf{18}\, \pi\ \boldsymbol{u^3}$$

2)



Il volume del solido $\mathbf{V_2}$ generato dalla rotazione completa di R attorno alla retta di equazione y =6 è dato dalla differenza tra il volume $\mathbf{V_3}$ del cilindro con raggio di base VO, di misura 6, e altezza OB, di misura $\sqrt{6}$, e il volume $\mathbf{V_4}$ del solido ottenuto dalla rotazione del triangolo mistilineo BVH attorno alla retta r: y =6.

$$V_3 = \pi \cdot \overline{OV}^2 \cdot \overline{OB} = 36\,\pi\,\sqrt{6}\,u^3$$

$$V_4 = \pi \int_0^{\sqrt{6}} x^2 dy = \pi \int_0^{\sqrt{6}} \left[6-(6-x^2)\ \right]^2 dx =$$

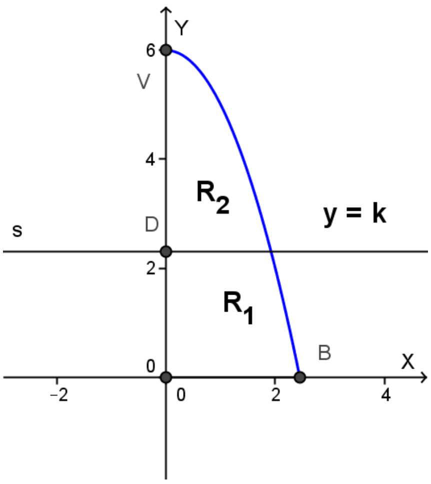
$$= \pi \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^{\sqrt{6}} = \frac{36}{5}\pi\sqrt{6}\ u^3$$

Quindi il volume richiesto è:

$$V_2 = V_3 - V_4 = 36\,\pi\,\sqrt{6} - \tfrac{36}{5}\pi\sqrt{6} = \boldsymbol{\tfrac{144}{5}\pi\sqrt{6}\ \ u^3}$$

3)

Dobbiamo determinare k in modo che la retta y = k divida R in due parti uguali R_1 ed R_2.



L'area di R puà essere calcolata velocemente mediante il Teorema di Archimede (si ricordi che OB misura $\sqrt{6}$):

Area (R) = $\boldsymbol{\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\cdot 2\sqrt{6}\cdot 6\right) = 4\sqrt{6}}$

Quindi Area (R_1) = Area (R_2) = $\boldsymbol{2\sqrt{6}}$

$s\!: \ y = k \quad 0 < k < 6 \qquad D(0;k)$

L'arco BV ha equazione: $x = +\sqrt{6-y}$ pertanto:

Area (R_1) = $\int_0^k \sqrt{6-y}\,dy = -\int_0^k -(6-y)^{\frac{1}{2}}\,dy =$

$-\left[\frac{2}{3}(6-y)^{\frac{3}{2}}\right]_0^k = -\frac{2}{3}\sqrt{(6-k)^3} + 4\sqrt{6}$

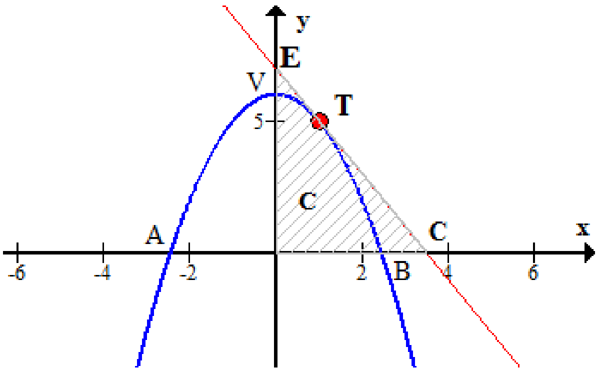
Dovrà essere:

$-\frac{2}{3}\sqrt{(6-k)^3} + 4\sqrt{6} = \ 2\sqrt{6}$ da cui si ottiene (ricordiamo che 0<k<6=):

$\boldsymbol{k = 6 - 3\sqrt[3]{2} \cong 2.22}$

4)

Con $0 < t < \sqrt{6}$ indichiamo con A(t) l'area del triangolo delimitato dagli assi cartesiani e dalla tangente alla parabola nel punto di ascissa t: si chiede di determinare l'area A(t).



$T = (t; 6 - t^2) \qquad 0 < t < \sqrt{6}$

Il coefficiente angolare della tangente in T è:

$m = y'(t) = -2t$

L'equazione della tangente in T è dunque:

$y = -2t(x - t) + 6 - t^2$

L'intersezione C della tangente con l'asse x ha coordinate $\boldsymbol{C} = \left(\frac{t^2+6}{2t}; \mathbf{0}\right)$
L'intersezione E della tangente con l'asse y ha coordinate: $\boldsymbol{E} = (\mathbf{0}; \boldsymbol{t}^2 + \mathbf{6})$

Quindi:

$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{t}) = \frac{1}{2}\overline{OC} \cdot \overline{OE} = \frac{1}{2}\left(\frac{t^2+6}{2t}\right) = \frac{(t^2+6)^2}{4t}$ in particolare $\boldsymbol{A}(\mathbf{1}) = \frac{\mathbf{49}}{\mathbf{4}}$

5)

$A(t) = \frac{(t^2+6)^2}{4t}$. Dobbiamo minimizzare A(t) quando $0 < t < \sqrt{6}$.

$A'(t) = \frac{3\,t^2}{4} + 3 - \frac{9}{t^2} = \frac{3t^4+12t^2-36}{4t^2} \geq 0$ se $3t^4 + 12t^2 - 36 \geq 0, t^4 + 4t^2 - 12 \geq 0$

$(t^2 + 6)(t^2 - 2) \geq 0,\ t^2 - 2 \geq 0 \implies$ $\boldsymbol{t} \leq -\sqrt{\mathbf{2}}$, $\boldsymbol{t} \geq \sqrt{\mathbf{2}}$**:** in tali intervalli la funzione cresce

e in $-\sqrt{2} < t < \sqrt{2}$ (con $t \neq 0$) decresce; nel dominio della t la funzione decresce da 0 a $\sqrt{2}$ e cresce da $\sqrt{2}\ a\ \sqrt{6}$: quindi **A(t) è minima per** $\boldsymbol{t} = \sqrt{\mathbf{2}}$.