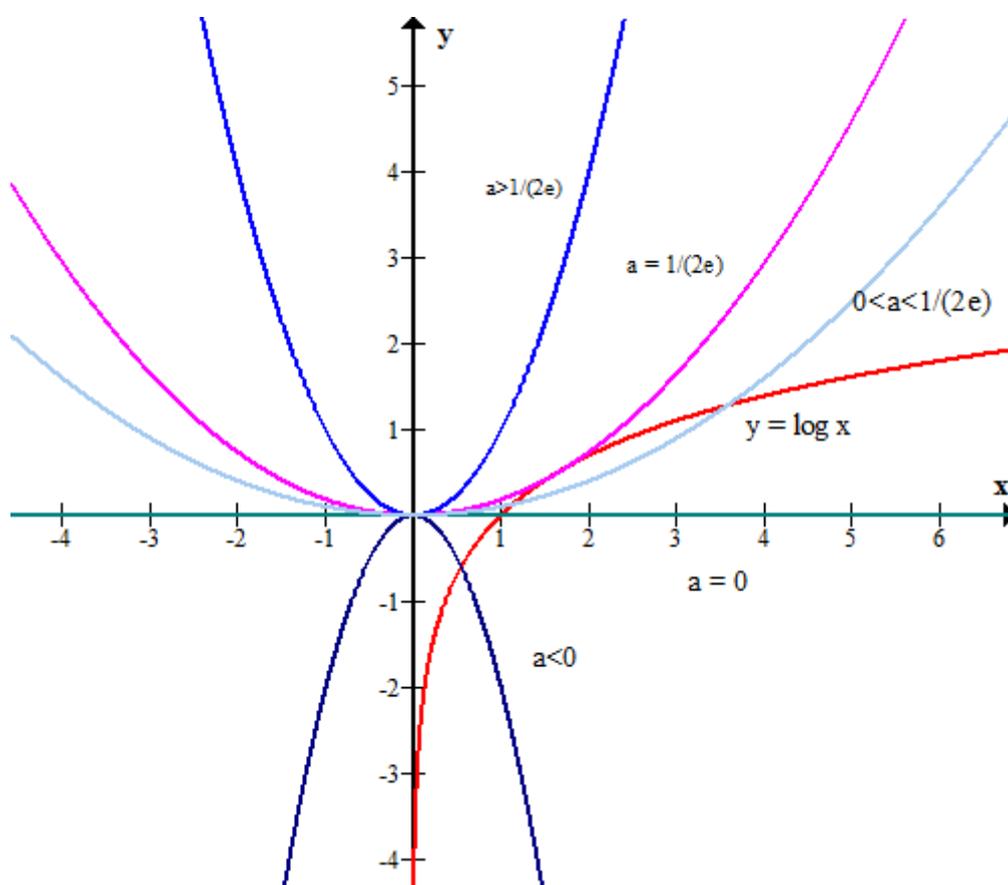


ORDINAMENTO 2006 - PROBLEMA 2

1.

$f(x) = \log x$, $g(x) = ax^2$, con $a \in \mathbb{R}$.

Rappresentiamo nello stesso sistema di riferimento la funzione logaritmica e la parabola generica (con $a=0$ abbiamo l'asse x , con $a>0$ parabole con vertice nell'origine e concavità verso l'alto, con $a<0$ concavità verso il basso).



Per discutere l'equazione $\log x = ax^2$ cerchiamo la parabola tangente al logaritmo. Occorre risolvere il seguente sistema ($x>0$):

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases} \quad \begin{cases} \log x = ax^2 \\ \frac{1}{x} = 2ax \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2a}} \end{cases} \quad \text{sostituendo nella prima equazione troviamo}$$

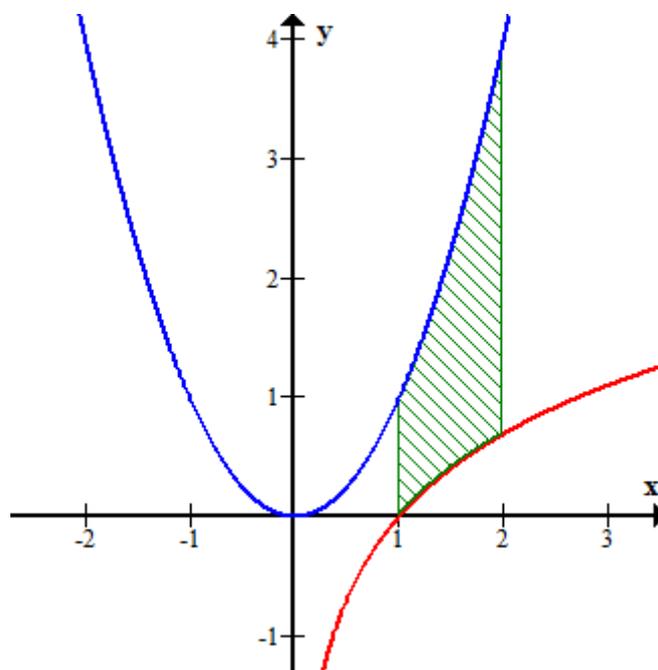
$$\log \frac{1}{\sqrt{2a}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2a}} = e^{\frac{1}{2}} \Rightarrow a = \frac{1}{2e} \text{ e con tale valore di } a \text{ si trova } x = \sqrt{e}$$

Quindi avremo:

- Se $a < 0$: 1 soluzione : $0 < x < 1$
- Se $a = 0$: 1 soluzione ($x = 1$)
- Se $0 < a < 1/(2e)$: 2 soluzioni distinte, $1 < x_1 < \sqrt{e}$, $x_2 > \sqrt{e}$
- Se $a = 1/(2e)$: 2 soluzioni coincidenti $x_1 = x_2 = \sqrt{e}$
- Se $a > 1/(2e)$: nessuna soluzione.
-

2.

Con $a = 1$ abbiamo le funzioni: $f(x) = \log x$, $g(x) = x^2$, che rappresentiamo graficamente evidenziando parte di piano di cui si chiede l'area.



L'area richiesta si ottiene calcolando il seguente integrale definito:

$$\int_1^2 (x^2 - \log x) dx$$

Una primitiva di $g(x) = x^2$ è $\frac{x^3}{3}$; una primitiva di $f(x) = \log x$ è $x \log x - 1$ (integrazione per parti). Si ha quindi:

$$\text{Area} = \int_1^2 (x^2 - \log x) dx = \left[\frac{x^3}{3} - (x \log x - 1) \right]_1^2 = \frac{10}{3} - 2 \log 2$$

3.

Dobbiamo studiare la funzione $h(x) = \log x - ax^2$ assegnando ad a un valore maggiore di $1/(2e)$. Scegliamo $a=1$. Quindi la funzione da studiare è:

$$h(x) = \log x - x^2$$

- Dominio: $0 < x < +\infty$
- Intersezioni con gli assi: nessuna (si riguardi il grafico del punto 1).
- Segno della funzione: $\log x - x^2 > 0, \log x > x^2$: mai (si guardi sempre il grafico del punto 1).
- Limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\log x - x^2) = -\infty \quad (x=0 \text{ asintoto verticale})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\log x - x^2) = -\infty \quad (x^2 \text{ è infinito di ordine superiore rispetto a } \log x)$$

- Eventuale asintoto obliquo: non esiste poiché $h(x)/x$ tende a $-\infty$ per x che tende a $+\infty$
- Studio della derivata prima: $y' = \frac{1}{x} - 2x$. Il dominio della derivata prima coincide con il dominio della funzione.

$$y' = \frac{1}{x} - 2x = 0 \text{ se } x = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ che è nel dominio.}$$

$y' = \frac{1}{x} - 2x > 0, 0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$: quindi la funzione è crescente in tale intervallo e decrescente per $x > \frac{\sqrt{2}}{2}$. In $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ abbiamo un massimo relativo, che vale

$$h\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2}(\log 2 + 1)$$

- Studio della derivata seconda: $y'' = -\frac{1}{x^2} - 2$. La derivata seconda risulta sempre negativa nel dominio della funzione, quindi la concavità è sempre verso il basso.
- Il grafico della funzione è il seguente:

