ORDINAMENTO 2006

QUESITO 1

La somma dei chicchi di grano è data da:

$$\boldsymbol{S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{63}}$$

Che la somma dei primi 64 termini della progressione geometrica di ragione 2 e primo termine 1. Tale somma vale:

$$\boldsymbol{S = \frac{2^{64} - 1}{2 - 1} = 2^{64} - 1}$$

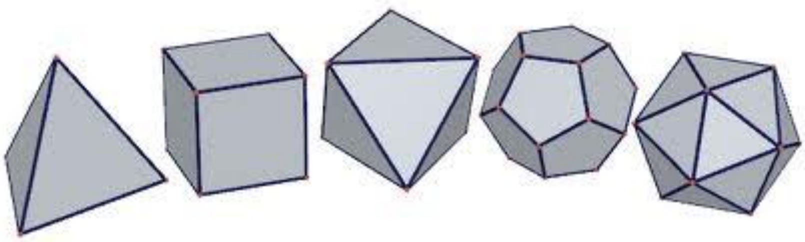
Se 1000 chicchi pesano 38 g, 1 chicco pesa $\frac{38}{1000}\, g = 0{,}038\ g$. Quindi il peso totale del grano è:

$\boldsymbol{(2^{64} - 1) \cdot 0{,}038 \cdot 10^{-6}\ tonnellate \cong 701 \cdot 10^{9}\ tonnellate}$

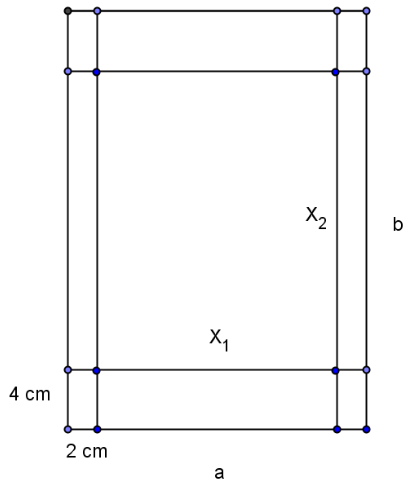
QUESITO 2

La somma delle facce di un angoloide è sempre minore di 360° e in ogni angoloide di un poliedro regolare le facce (che sono almeno tre) devono essere tutte uguali ad un angolo interno di un poligono regolare.
Si hanno quindi le seguenti possibilità:

1. Le facce del poliedro sono triangoli (equilateri): le facce de4gli angoloidi possono essere 3 (3x60°=180°<360°), 4 (4x60°=240°<360°), 5 (5x60°=300°<360°), ma non di più: con 6 facce avremmo 6x60°=360° che non è minore di 360°.
   Abbiamo quindi tre poliedri regolari con le facce triangolari: **il tetraedro, l'ottaedro e l'icosaedro.**
2. Se le facce del poliedro sono quadrate, le facce degli angoloidi non possono essere più di 3 (3x90°=270°, ma 4x90°=360°): in questo caso si ha l'**esaedro (il cubo).**
3. Se le facce del poliedro sono pentagoni (regolari), ogni angoloide può avere al massimo 3 facce (3x108°=324°: ha il **dodecaedro regolare.**
4. Non possono esistere poliedri regolari le cui facce abbiamo più di 5 lati (per esempio già con l'esagono avremmo 3x120°=360°).



QUESITO 3



Area di stampa = $x_1 \cdot x_2 = 50\ cm^2,\ x_1 > 0,\ x_2 > 0$

Poniamo $x_1 = x\ (x > 0),\ x_2 = \frac{50}{x}$
Dette a e b le dimensioni del foglio, risulta:

$$a = x + 4 \qquad b = \frac{50}{x} + 8$$

Quindi:
Area foglio: $y = ab = (x + 4)\left(\frac{50}{x} + 8\right) = 8x + \frac{200}{x} + 82$
Si tratta di una funzione continua, essendo x>0.
Studiamo la derivata prima: $\boldsymbol{y' = 8 - \frac{200}{x^2}}$.
Nel nostro dominio risulta y'=0 per x=5 e y'>0 per x>5.
La funzione quindi decresce da 0 a 5 e cresce da 5 in poi: in **x=5** abbiamo quindi il **minimo assoluto.** Con tale valore di x avremo **a = 9 cm e b = 18 cm**, che sono le dimensioni del foglio di carta di area minima.

QUESITO 4

Se un cubo è inscritto in una sfera la sua diagonale è uguale al diametro della sfera. Quindi diagonale cubo d = 1 m . Indicato con s lo spigolo del cubo si ha: $d = s\sqrt{3}$, quindi: $s = \frac{1}{\sqrt{3}}\ m$. Volume cubo = s^3 = $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\ m\right)^3 = \frac{1}{3\sqrt{3}}\ m^3 = \frac{10^3}{3\sqrt{3}}\ dm^3 \cong 0{,}1924 \cdot 10^3\ dm^3 =$
$= 192{,}4\ dm^3 = 192{,}4\ litri$.

QUESITO 5

$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$, con $n \in \mathbb{N}$.

La somma dei coefficienti è data da: $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n}$.

Posto a=b=1 risulta:

$$(1+1)^n = 2^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n}.$$

QUESITO 6

$k \cos 2x - 5k + 2 = 0,\ \ k \in \mathbb{R},\ \ 15° < x < 45°$

Notiamo k deve essere diverso da zero, altrimenti avremmo 2=0.

$da\ 15° < x < 45°\ segue\ 30° < 2x < 90° \Longrightarrow 0 < \cos 2x < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Dall'equazione di partenza otteniamo: $\cos 2x = \frac{5k-2}{k} \Longrightarrow 0 < \frac{5k-2}{k} < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Si tratta quindi risolvere il sistema:

$\begin{cases} \frac{5k-2}{k} > 0 \\ \frac{5k-2}{k} < \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ Eseguendo i calcoli si ottiene $\begin{cases} k < 0 \lor k > \frac{2}{5} \\ 0 < k < \frac{4}{10-\sqrt{3}} \end{cases}$ le cui soluzioni sono:

$\frac{2}{5} < k < \frac{4}{10-\sqrt{3}}$. L'equazione data ha quindi soluzioni (una) per questi valori di k.

N.B.

Allo stesso risultato si può pervenire studiando graficamente il sistema:

$$\begin{cases} \boldsymbol{y = cos2x} \\ \boldsymbol{y = \frac{5k-2}{k}} \end{cases}$$

QUESITO 7

$f(x) = x^3 - 2x^2$ $\qquad$ $\mathrm{I} = [0; 1]$

Si tratta di una funzione polinomiale intera, quindi è continua e derivabile su tutto R, in particolare (come richiesto dal teorema di Lagrange) è continua nel chiuso $[0; 1]$ e derivabile nell'aperto (0; 1). Esiste quindi almeno un punto ξ nell'intervallo aperto tale che: $\boldsymbol{\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)}$

a=0, quindi f(0)=0 $\qquad$ b=1, quindi f(1)= -1

I punti previsti dal teorema di Lagrange sono quelli interni ad I per cui:

$$\boldsymbol{3x^2 - 4x = -1}$$

Le soluzioni di tale equazione sono $x = \frac{1}{3}$ e $x = 1$, di cui solo 1/3 è interno all'intervallo dato: quindi $\boldsymbol{\xi = 1/3}$.

QUESITO 8

Poiché la funzione non è continua in tutti i punti dell'intervallo dato (non esiste in $x = \pi/2$), non soddisfa il teorema degli zeri, pertanto non si può concludere che esista almeno un punto interno all'intervallo in cui la funzione si annulla.
L'equazione **tg x = 0** ammette le soluzioni $x = k\pi$ e nessuna di esse (k è un intero) è interna all'intervallo dato.

QUESITO 9

La funzione f(x) è derivabile e non nulla in ogni punto del suo dominio; inoltre sappiamo che $f'(x) = f(x)\ ed\ f(0) = 1$. Si chiede se sia possibile determinare la funzione.

L'unica funzione non nulla che coincide con la sua derivata è $f(x) = e^x$: questa funzione soddisfa tutte le condizioni richieste.

METODO DIRETTO

Dalle ipotesi segue che $\frac{f\prime(x)}{f(x)} = 1$. Integrando otteniamo $\ln|f(x)| = x + k$ da cui ricaviamo

$|f(x)| = e^{x+k} = e^k e^x$, $f(x) = \pm e^k e^x = ce^x$ (avendo posto $c = \pm e^k$).

Da $f(x) = ce^x$, ponendo f(0)=1 troviamo c=1, quindi $\boldsymbol{f(x) = e^x}$.

QUESITO 10

La funzione $f(x) = a\ sen\ x + b\cos x$ è continua e derivabile su tutto R.

$$f'(x) = a\cos x - b\ sen\ x$$

Devono essere soddisfatte contemporaneamente le due seguenti condizioni:

$f'\left(\frac{4}{3}\pi\right) = 0$ da cui $-\frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}b = 0$

$f\left(\frac{2}{3}\pi\right) = 1$ da cui $\frac{\sqrt{3}}{2}a - \frac{1}{2}b = 1$

Risolvendo il sistema si ottiene $\boldsymbol{a = \sqrt{3}\ e\ b = 1.}$
La funzione richiesta è allora:

$\boldsymbol{f(x) = \sqrt{3} sen\ x + \cos x}$ (periodo $\boldsymbol{T = 2\pi}$)

che si può scrivere nella forma $\boldsymbol{f(x) = 2\ sen\ (x + \frac{\pi}{6})}$

N.B.

$f(x) = a\ sen\ x + b\cos x$ può essere scritta nella forma

$f(x) = \sqrt{a^2 + b^2}\ sen\ (x + \alpha),\ tg\ \alpha = \frac{b}{a}$