# ORDINAMENTO 2007

## QUESITO 1

Le sezioni date suddividono il solido in questione in solidi approssimabili con prismi aventi per base un triangolo equilatero di lato pari all'ordinata y della funzione e altezza dx.

Il triangolo equilatero di lato $y = 2\sqrt{x}$, ha area $y^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$; il volume di ognumo dei suddetti prismi può quindi essere espresso nella forma:

$$dV = \left( y^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \right) dx .$$

Il volume richiesto si ottiene sommando questi infiniti "volumetti", quindi integrando dV tra 0 e 1:

$$V = \int_0^1 dV = \int_0^1 \left( y^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \right) dx = \int_0^1 \left( 4x \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \right) dx = \int_0^1 \left( x \cdot \sqrt{3} \right) dx =$$

$$= \sqrt{3} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

## QUESITO 2

Ponendo $a = 80 \quad b = 60 \quad c = 40$, per il teorema del coseno si ha:

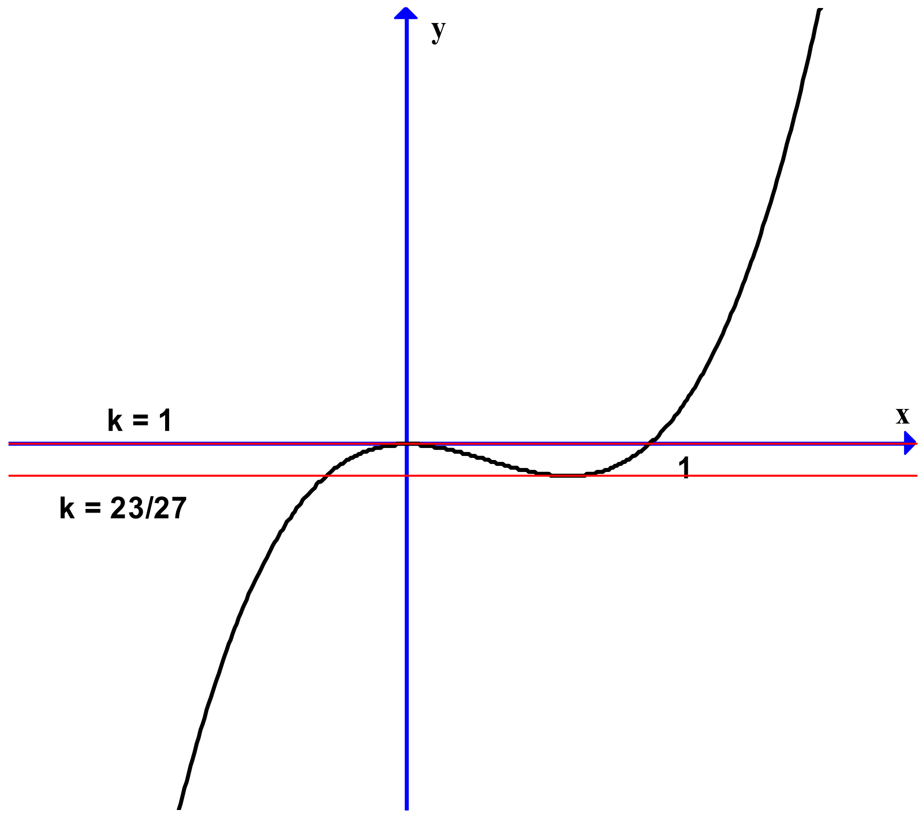
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \bullet \cos\alpha$, da cui $\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = -\frac{1}{4}$, quindi $\alpha = 104°29'$

In modo analogo si trova:

$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{11}{16}$, quindi $\beta = 46°34'$

$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{7}{8}$, quindi $\gamma = 28°57'$

## QUESITO 3




L'equazione data può essere scritta nella forma: $x^3 - x^2 = k - 1$
Il numero delle soluzioni dell'equazione data corrisponde al numero di intersezioni tra le curve di equazione:
$y = x^3 - x^2$ e $y = k - 1$.
Da uno studio qualitativo della prima curva si ottiene il minimo di ordinata -4/27 ed il massimo di ordinata 0.
Trovando le due rette parallele all'asse x per questi punti si ottengono i valori di k indicati in figura (k = 1, retta per l'origine; k = 23/27, retta per il minimo).
L'analisi grafica porta alle seguenti conclusioni:

$k<23/27$: 1 soluzione reale
$23/27 \le k \le 1$: 3 soluzioni reali (negli estremi due coincidono)
$k>1$: 1 soluzione reale

## QUESITO 4

Indichiamo con R il raggio di base del cono, con h la sua altezza e con a=1 l'apotema.
Il volume del cono è:

$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$. Risulta poi: $h^2 + R^2 = 1$ (*)
Il volume è massimo se lo è $z = R^2 h$.
Siccome $h^2 + R^2$ è costante $z = R^2 h = R^2 (h^2)^{\frac{1}{2}}$ è massimo se le basi sono proporzionali

agli esponenti, ovvero:

$$\frac{R^2}{1}=\frac{h^2}{\frac{1}{2}}\text{, da cui } R^2=2h^2 \text{ e dalla (*) } h=\sqrt{\frac{1}{3}} \quad \text{e} \quad R=\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Il Volume massimo è quindi:

$$V_{max}=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{2}{3}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)=\frac{2\pi\sqrt{3}}{27}m^3=\frac{2\pi\sqrt{3}}{27}\cdot 10^3 dm^3 \approx$$

$$\approx 403\,dm^3=403\,\text{litri}$$

## QUESITO 5

$y=x^3+8=f(x)$, intervallo [-2 ; 2 ] = [ a ; b ]
La funzione, razionale intera, è continua nell'intervallo chiuso e derivabile nell'aperto; sono quindi soddisfatte le ipotesi del teorema di Lagrange: esiste almeno un punto c nell'aperto ( -2 ; 2 ) tale che:

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

La derivata della funzione è: $y'=3x^2$, inoltre f(2) = 16, f(-2) = 0, b - a = 4
I punti c si ottengono risolvendo l'equazione

$3x^2=4$, da cui $c=\pm\sqrt{\frac{4}{3}}$, valori entrambi accettabili.

I valori medi richiesti sono: $f(c)=\pm\frac{4}{3}\sqrt{\frac{4}{3}}+8$.

Il significato geometrico del teorema di Lagrange è il seguente:
nelle ipotesi del teorema esiste almeno un punto c dell'aperto (a ; b ) tale che la tangente al grafico della funzione nel punto di ascissa c è parallela alla congiungente gli estremi del grafico stesso (a;f(a)) e (b;f(b) ); il valor medio f'(c) non è altro che il coefficiente angolare di quest'ultima retta.

## QUESITO 6

Nel primo caso (prima la maggiorazione e poi la diminuzione) il prezzo finale è:

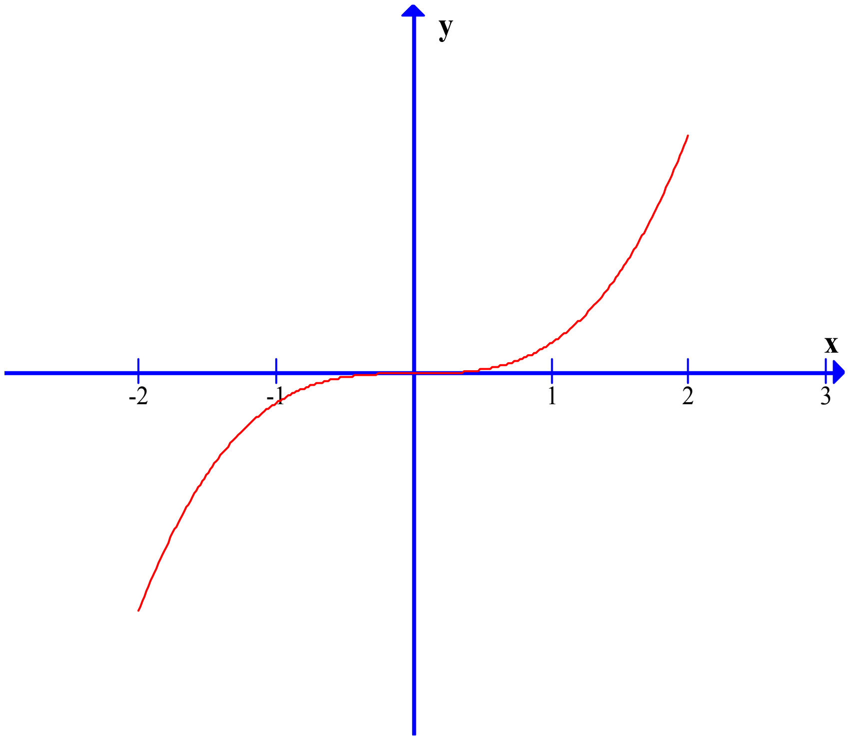
$$\left(p+\frac{6}{100}p\right)-\frac{6}{100}\left(p+\frac{6}{100}p\right)=p-\frac{36}{1000}\cdot p=0{,}9964\cdot p$$

Nel secondo caso il prezzo finale è:

$$\left(p-\frac{6}{100}p\right)+\frac{6}{100}\left(p-\frac{6}{100}p\right)=p-\frac{36}{1000}\cdot p=0{,}9964\cdot p$$

Quindi il prezzo finale è lo stesso (minore di quello di partenza).

## QUESITO 7




Essendo la funzione dispari f(- x) = - f(x), quindi f(x) = - f(- x).

$$\int_{-2}^{0} f(x)dx = \int_{-2}^{0} -f(-x)dx = -\int_{-2}^{0} f(-x)dx$$

ponendo -x=t, gli estremi diventano 2 e 0 e dx=-dt, cioè:

$$-\int_{-2}^{0} f(-x)dx = -\int_{2}^{0} f(t)(-dt) = \int_{2}^{0} f(t)dt = -\int_{0}^{2} f(t)dt = -\int_{0}^{2} f(x)dx$$

Pertanto $\int_{-2}^{2} f(x)dx = \int_{-2}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{2} f(x)dx = 0$

Calcoliamo il secondo integrale richiesto:

$$\int_{-2}^{2} (3 + f(x))dx = \int_{-2}^{2} 3dx + \int_{-2}^{2} f(x)dx = [3x]_{-2}^{2} + 0 = 12$$

## QUESITO 8

L'equazione data, con le condizioni $n \geq 4$ ed $n \geq 5$ equivale a:

$$4 \cdot \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} = 15 \cdot \frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{3!}$$

che ammette le soluzioni n=2 ed n=3 non accettabili e le soluzioni dell'equazione $n^2 - 16n + 60 = 0$, che sono **n = 6 ed n = 10** accettabili.

## QUESITO 9

L'integrale si può risolvere per sostituzione, ponendo, per esempio:

x = sen t , invertibile nell'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, in cui il coseno non è negativo. Risulta poi dx = cos t dt .

$$\int \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}(\cos t)dt = \int \cos^2 t dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\operatorname{sen}2t + K$$

Essendo sen 2t = 2 sen t cos t = $2x\sqrt{1-x^2}$ , lintegrale risulta:

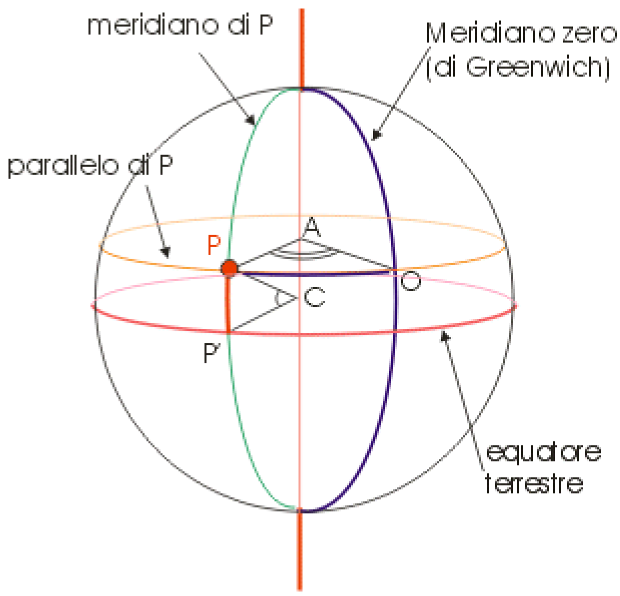
$$\frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + k .$$

Calcoliamo ora l'integrale definito:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \left[\frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

$y = \sqrt{1-x^2}$ rappresenta la semicirconferenza con centro nell'origine e raggio 1; l'integrale definito tra 0 e 1 di questa funzione non è altro che l'area del quarto di cerchio di raggio 1 situato nel primo quadrante che vale $\frac{\pi}{4}$, in accordo con il calcolo dell'integrale precedente.

## QUESITO 10




**Piano equatoriale**: piano perpendicolare all'asse e passante per il centro della Terra
**Parallelo**: circonferenza ottenuta intersecando un piano parallelo a quello equatoriale con la superficie sferica
**Poli terrestri**: intersezioni tra superficie sferica e asse di rotazione
**Meridiano (geografico)**: semicirconferenza massima passante per i poli
**Merdiano zero ( o fondamentale)**: meridiano di riferimento (Greenwich)
**Parallelo zero (di riferimento)**: parallelo equatoriale

Dato un punto P della superficie terrestre si considerino il parallelo ed il meridiano passanti per esso; indichiamo con P' l'intersezione tra il meridiano per P e l'equatore; l'angolo PCP', essendo C il centro della sfera, è definito LATITUDINE e varia da O° a 90° se P è nell'emisfero Nord, da -90° a O° se P è nell'emisfero Sud.

Indichiamo con O l'intersezione tra il parallelo per P ed il merdiano fondamentale e sia A l'intersezione tra il piano parallelo per P e l'asse di rotazione: l'angolo PAO è definito LONGITUDINE e varia da 0° a 180° a EST del meridiano fondamentale, da -180° a 0° a Ovest del meridiano fondamentale.

La LATITIDINE $\lambda$ e la LONGITUDINE $\varphi$ definiscono un sistema di coordinate geografiche terrestri.