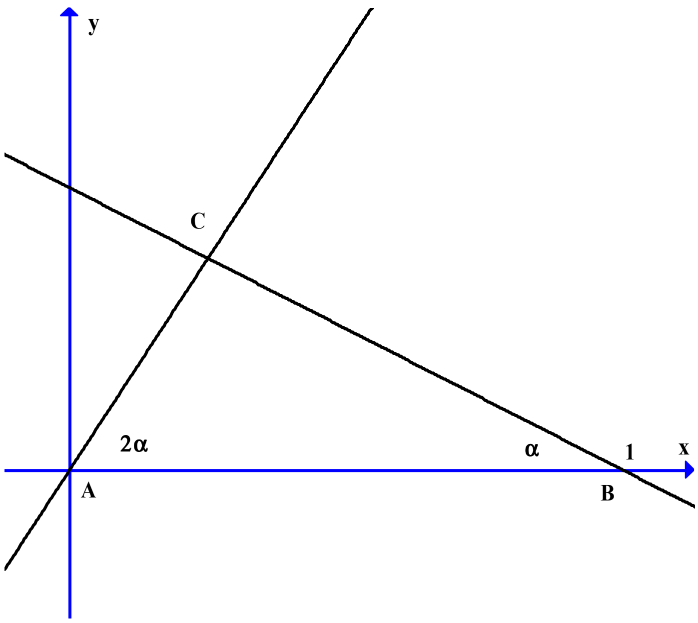
ORDINAMENTO 2007 - PROBLEMA 1

1.



Equazione della retta AC: $y=(tg2\alpha)x$
Equazione della retta BC: $y=-(tg\alpha)(x-1)$
Ponendo $tg\alpha=t$ risulta:

Retta AC: $y=(tg2\alpha)x=\dfrac{2t}{1-t^2}x$
Equazione della retta BC: $y=-(tg\alpha)(x-1)=-t(x-1)$
Ricavando t dalla seconda equazione e sostituendolo nella prima si ottiene l'equazione del luogo richiesto:

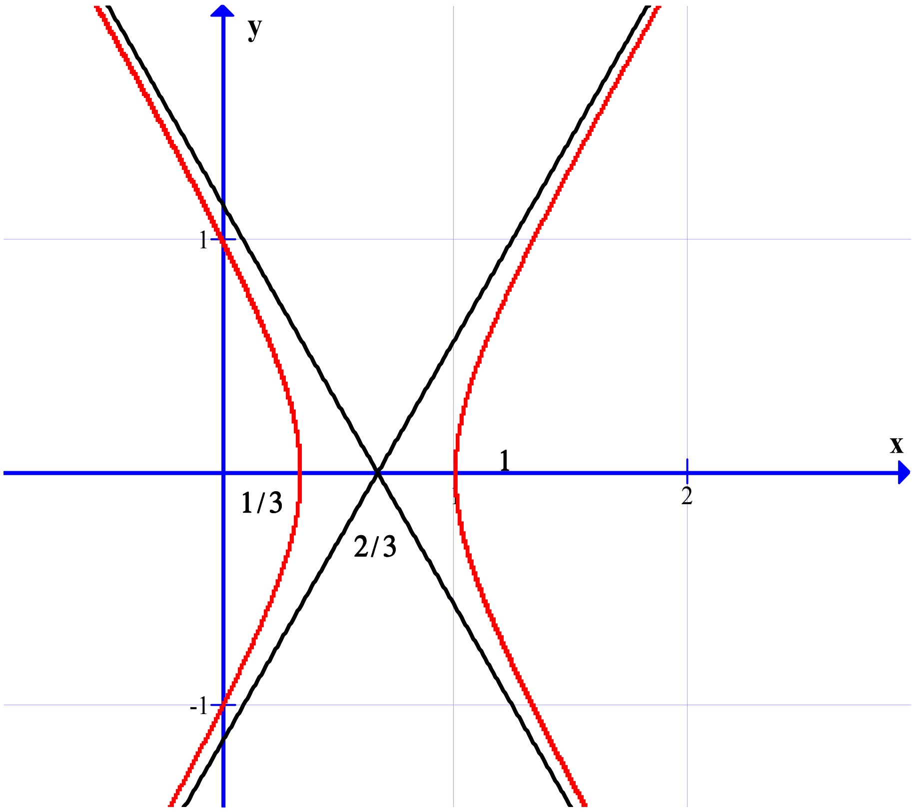
$3x^2-y^2-4x+1=0$ (*)

2.

Si tratta di un'iperbole traslata, di centro (2/3; 0); effettuando la traslazione di assi:
x' = x - 2/3 , y' = y
ossia
x = x' + 2/3, y = y'
si ottiene la forma canonica (trascuro gli apici):

$\dfrac{x^2}{\frac{1}{9}}-\dfrac{y^2}{\frac{1}{3}}=1$ da cui $\dfrac{b}{a}=\sqrt{3}$ e quindi gli asintoti $y=\pm\sqrt{3}(x-\dfrac{2}{3})$

Il grafico di questa iperbole è:



Limitazioni geometriche:

$0 < 3\alpha < \pi \quad \Rightarrow \quad 0 < \alpha < \pi / 3$

Con $\alpha = 0$ il punto C si trova nel punto dell'asse x di ascissa 1/3; infatti, in generale, per il teorema dei seni, si ha:

$\frac{AC}{BC} = \frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}(2\alpha)} = \frac{1}{2\cos\alpha}$ che, per $\alpha \to 0$, tende a 1/2.

Pertanto AC=(1/2)BC, da cui AC=1/3, essendo AB=1.

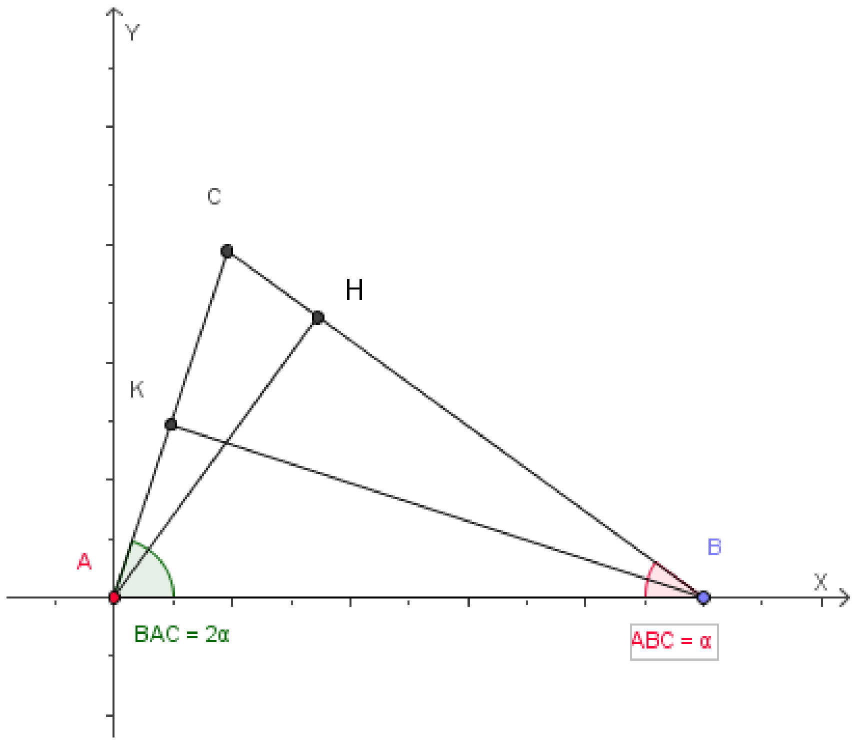
Con $\alpha = \pi / 3$ il punto C non si ottiene (le rette AC e BC sono parallele); pertanto le limitazioni dell'ascissa di C sono $x \le 1/3$; il grafico del luogo richiesto è quindi il ramo sinistro dell'iperbole.
Notiamo esplicitamente che il vertice C del triangolo può essere in uno qualsiasi dei quattro quadranti.

Osservazione

Il grafico richiesto può essere ottenuto anche studiando la funzione di equazione

$y = \sqrt{3x^2 - 4x + 1}$, ottenuta dalla (*), e la sua simmetrica rispetto all'asse delle x; valgono le stesse considerazioni di prima sulle limitazioni geometriche.

3.



Utilizzando i teoremi di trigonometria sui triangoli rettangoli, si ha che:
l'altezza AH relativa al lato BC vale: $\overline{AH} = \overline{AB} \cdot \text{sen}\alpha = \text{sen}\alpha$
L'altra altezza: $\overline{BK} = \overline{AB} \cdot \text{sen}(2\alpha) = \text{sen}(2\alpha)$

La somma dei quadrati di queste due altezze è:
$z = \text{sen}^2\alpha + \text{sen}^2(2\alpha) = \text{sen}^2\alpha(5 - 4\text{sen}^2\alpha)$
Pongo $\text{sen}\alpha = x$ e considero il triangolo nel primo quadrante (ciò non lede la generalità della questione); in questo modo x è positivo.

$z = x^2(5 - 4x^2)$

Con il metodo delle derivate si ottiene il massimo richiesto per
$x = \sqrt{\frac{5}{8}}$, cioè per $\text{sen}\alpha = \sqrt{\frac{5}{8}}$ da cui $\alpha \approx 52°14'$.

Metodo sintetico

$z = x^2(5 - 4x^2) = \frac{1}{4}\left(4x^2(5 - 4x^2)\right)$

z è massima se lo è $\left(4x^2(5 - 4x^2)\right)$

Si tratta del prodotto di due quantità a somma costante: $4x^2+(5-4x^2)=5$ quindi è massimo se le due quantità sono uguali: $4x^2=5-4x^2$ da cui $x^2=\frac{5}{8}$ ossia $x=\sqrt{\frac{5}{8}}$, come trovato nel caso precedente.

4.

AC è la base di un triangolo isoscele con l'angolo al vertice di 36°, quindi è la sezione aurea del lato (che misura 1); la sua misura è quindi $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, come si ottiene risolvendo la proporzione:

$1:x=x:(1-x)$.

N.B.

Per la dimostrazione della proprità suddetta si veda la soluzione su matefilia del quesito 1 della maturtà di ordinamento 2005: http://www.matefilia.it/maturita/ord2005/ord2005.shtm