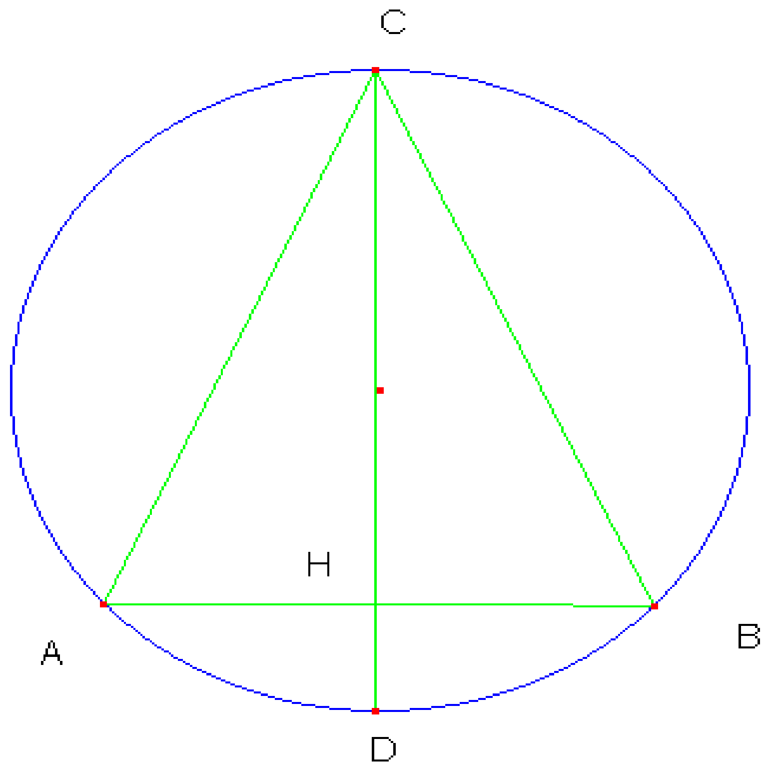
# ORDINAMENTO 2007 - PROBLEMA 2

**1.**




Ponendo HC = x e HD = y si ha:
x+y = 2R

Per il secondo teorema di Euclide $AH = \sqrt{xy}$.
L'area del triangolo è:

$S = AH \cdot CH = x\sqrt{xy}$ ; S è massima se lo è $S^2 = x^3 y$ ; e siccome x+y è costante, il massimo si ha quando
$\frac{x}{3} = \frac{y}{1}$; da cui x= 3y, perciò x = (3/2) R, che corrisponde all'altezza del triangolo equilatero inscritto.

*Il triangolo inscritto di area massima è quindi quello equilatero.*

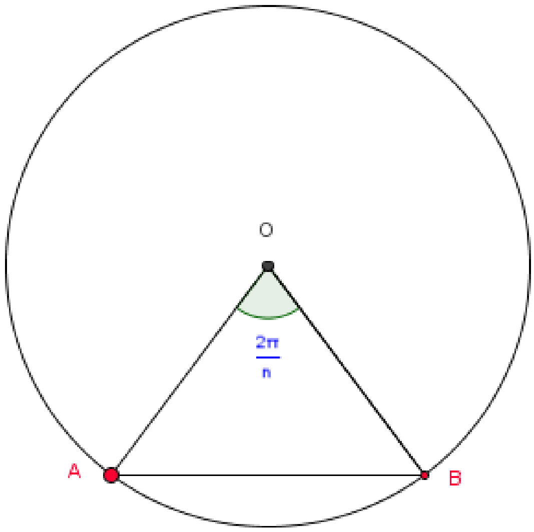
Metodo analitico

Essendo y = 2R - x, l'area risulta: $S = AH \cdot CH = x\sqrt{xy} = x\sqrt{x(2R - x)}$ che è massima se lo è $S^2 = x^3(2R - x) = z$, con $0 \le x \le 2R$.

Facendo i calcoli si trova che z' = 0 per x = (3/2)R e x = 0; studiando il segno della derivata prima (o applicando il teorema di Weierstrass all'intervallo chiuso e limitato in questione) si trova il massimo richiesto per x = (3/2) R.

## 2.

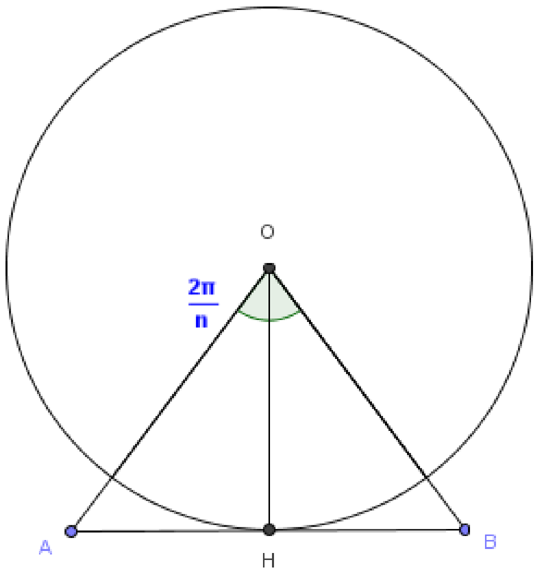
Indicando con O il centro della circonferenza e con AB il lato del poligono regolare inscritto di n lati, l'area del poligono si ottiene moltiplicando per n l'area del triangolo AOB.




Essendo $A\hat{O}B = \frac{2\pi}{n}$ e ricordando che l'area di un triangolo si può calcolare come semiprodotto di due lati per il seno dell'angolo compreso, si ha:

$S_n = n \cdot \text{Area}(AOB) = n \cdot \left( \frac{1}{2} r \cdot r \cdot \text{sen}\left( \frac{2\pi}{n} \right) \right) = \frac{n}{2} r^2 \text{sen}\left( \frac{2\pi}{n} \right)$, come richiesto.

Per il poligono regolare circoscritto, si opera in modo analogo.



Il lato AB è tangente alla circonferenza e l'altezza ad esso relativa OH è pari al raggio; quindi, in questo caso, risulta:

$$AH = OH \cdot tg(\frac{1}{2}\frac{2\pi}{n}) = r \cdot tg\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$S'_n = n \cdot Area(AOB) = n \cdot (AH \cdot OH) = n \cdot r^2 \cdot tg\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

## 3.

$$\lim_{n\to\infty}(S_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}r^2 sen\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}r^2\frac{2\pi}{n}\left(\frac{sen\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{\frac{2\pi}{n}}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}r^2\frac{2\pi}{n}\cdot 1 = \pi r^2$$

## 4.

Il problema della quadratura del cerchio consiste nella ricerca di un quadrato di area pari a quella del cerchio dato.
Si tratta di un problema classico, che si è dimostrato essere irrisolvibile per via elementare. Ciò equivale a dire che non è possibile costruire, usando solo riga e compasso, il lato del quadrato equivalente al cerchio.
Se per esempio prendiamo il cerchio di lato 1, la sua area è uguale a $\pi$, quindi il lato del quadrato equivalente è $\sqrt{\pi}$, che non può essere costruito per via elementare.
La dimostrazione dell'impossibilità di quadrare il cerchio (per via elementare) è una conseguenza del fatto che $\pi$ è un numero trascendente.