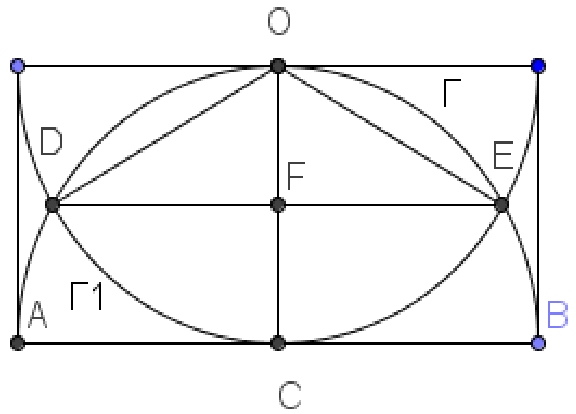
ORDINAMENTO 2008 - PROBLEMA 2

a)



OC, OD, OE, CD e CE misurano 1, essendo tutti raggi; pertanto:
gli angoli DOC e COE misurano 60°;
OF è la metà di DO quindi misura ½

$\overline{DF} = \overline{FE} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

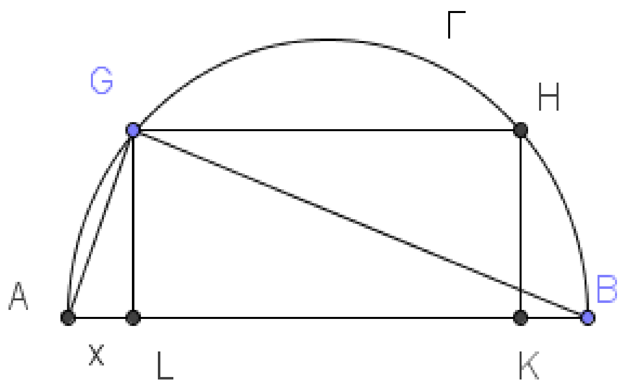
L'area della regione di piano intersezione dei due semicerchi è il doppio dell'area del segmento circolare DCE.

Area (segmento circolare DCE) = Area (settore DOE di Γ_1) – Area (triangolo DOE) =

$= \frac{1}{3}\pi\overline{DO}^2 - \frac{\overline{DE}\cdot\overline{OF}}{2} = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$

L'area richiesta vale quindi $\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

b)

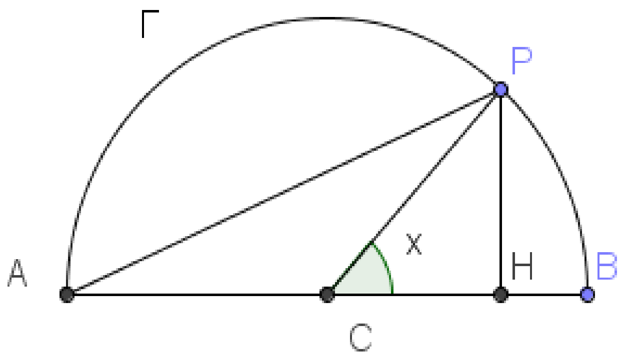


Posto $\overline{AL} = x$ risulta: $0 \le x \le 1$
$\overline{KL} = 2 - 2x$, $\overline{LB} = 2 - x$
Per il secondo teorema di Euclide si ha: $\overline{GL} = \sqrt{x(2-x)}$
Area (GHKL) = $\overline{KL} \cdot \overline{GL} = 2(1-x)\sqrt{x(2-x)}$ = y che è massima se lo è il suo quadrato, cioè:
$4(1-x)^2 x(2-x)$ = z
Studiando la derivata di questa funzione si ottiene che z, e quindi y, è massima per

$x = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$. In corrispondenza di tale valore si ha l'area massima richiesta che è pari a **1.**

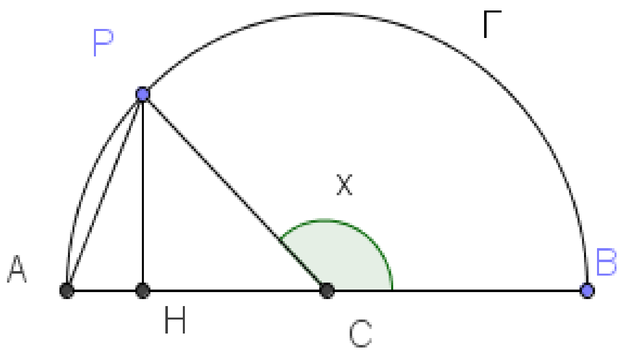
c)

Primo caso: $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$
$\overline{AP} = 2\cos(x/2)$; $\overline{AH} = 2\cos^2(x/2) = 1 + \cos x$; $\overline{PH} = sen\, x$; $\overline{CH} = \cos(x)$



$$S_1 = Area(APH) = \frac{\overline{AH} \cdot \overline{PH}}{2} = \frac{1}{2} sen\, x(1+\cos x)$$
$$S_2 = Area(PCH) = \frac{\overline{PH} \cdot \overline{CH}}{2} = \frac{1}{2} sen\, x \cos x$$
$$f(x) = \frac{S_1(x)}{S_2(x)} = \frac{1+\cos x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x} + 1 = \sec(x) + 1$$

Secondo caso: $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$



In questo caso $\overline{CH} = \overline{PC}\cos(\pi - x) = -\cos x$

Quindi $S_2 = Area(PCH) = \dfrac{\overline{PH} \cdot \overline{CH}}{2} = -\dfrac{1}{2} sen\, x\, cos\, x$

La funzione richiesta è:

$$f(x) = \frac{S_1(x)}{S_2(x)} = -\frac{1+\cos x}{\cos x} = -(\frac{1}{\cos x} + 1) = -(\sec(x) + 1)$$

Complessivamente si ha:

$$f(x) = |\sec(x) + 1|$$

d)

Il grafico di **f(x)** si ottiene facilmente dal grafico della secante. In figura il grafico nell'intervallo $[-2\pi; 2\pi]$