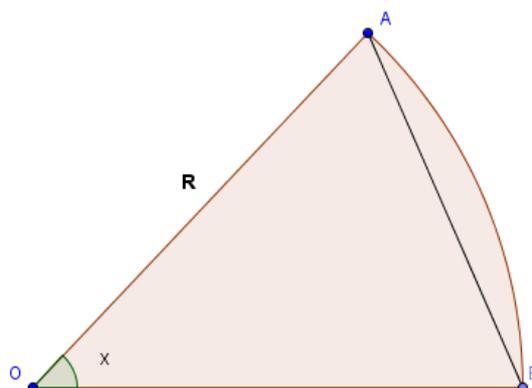


**ORDINAMENTO 2009 - PROBLEMA 1**  
**1)**

**a) Angolo x convesso**



L'area richiesta si ottiene **togliendo** dall'area del settore circolare OAB quella del triangolo OAB.

Area settore:  $\pi R^2 = x : 2\pi$ ; da cui

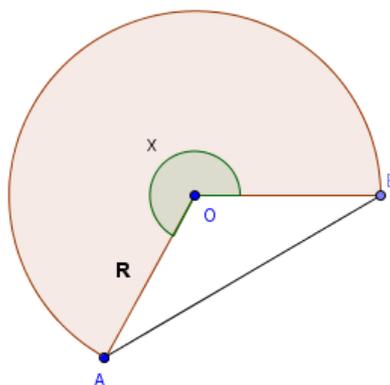
$$\text{Area settore} = \frac{R^2 x}{2}$$

$$\text{Area triangolo} = \frac{R \cdot R \cdot \text{sen}(x)}{2}$$

$$\text{Area segmento circolare} = \text{Area settore} - \text{Area triangolo} = \frac{R^2 x}{2} - \frac{R \cdot R \cdot \text{sen}(x)}{2}$$

$$= \frac{1}{2} R^2 (x - \text{sen}x) = S(x)$$

**b) Angolo x concavo**



In questo caso l'area richiesta si ottiene **aggiungendo** all'area del settore l'area del triangolo, che è uguale a:

$$\text{Area triangolo} = \frac{R \cdot R \cdot \text{sen}(2\pi - x)}{2} = \frac{R \cdot R \cdot \text{sen}(2\pi - x)}{2} = -\frac{R \cdot R \cdot \text{sen}(x)}{2}$$

$$\text{Area segmento circolare} = \text{Area settore} + \text{Area triangolo} = \frac{R^2 x}{2} + \left(-\frac{R \cdot R \cdot \text{sen}(x)}{2}\right)$$

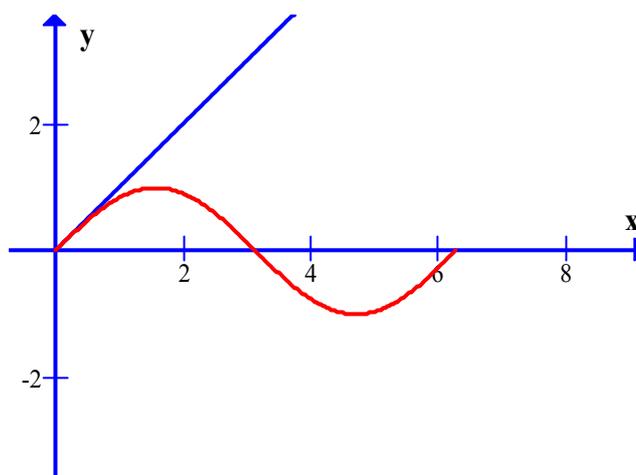
$$= \frac{1}{2} R^2 (x - \text{sen}x) = S(x) \text{ come prima.}$$

2)

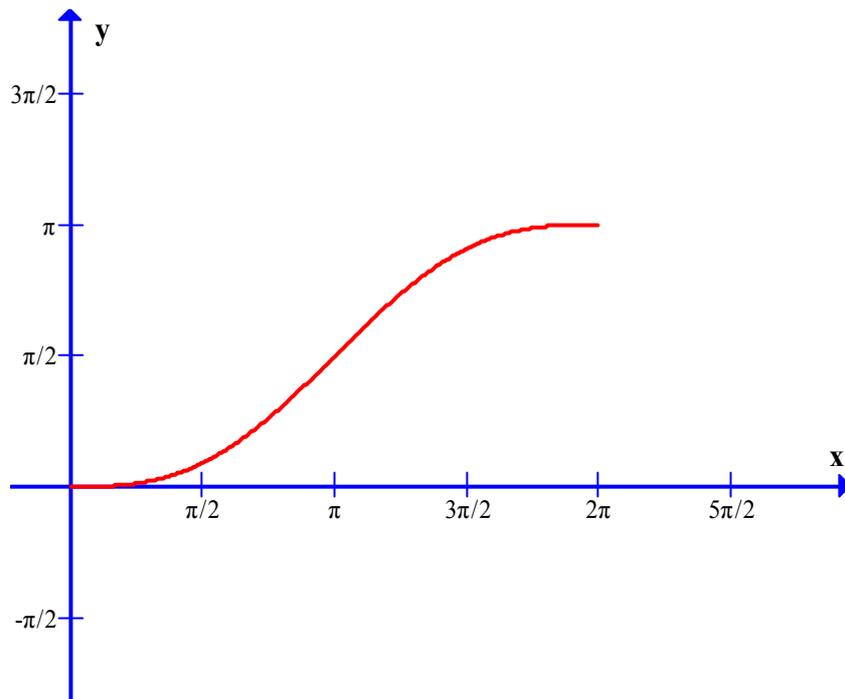
Con **R=1** la funzione diventa

$$y = \frac{1}{2}(x - \text{sen}x), \text{ da studiare nell'intervallo } [0; 2\pi].$$

- $y(0) = 0, y(2\pi) = \pi$
- Con  $y=0$  si ottiene  $x - \text{sen} x = 0$ , cioè  $\text{sen} x = x$  che ammette la sola soluzione  $x = 0$



- $y' > 0$  per ogni  $x$  dell'intervallo escluso lo zero.
- $y' = \frac{1}{2}(1 - \cos x) = 0$  se  $\cos x = 1$ , cioè per  $x = 0, x = 2\pi$
- $y' > 0$  se  $1 - \cos x > 0, \cos x < 1$ : per ogni  $x$  esclusi  $x = 0, x = 2\pi$ : quindi la funzione è sempre crescente e agli estremi ha la tangente orizzontale.
- $y'' = \frac{1}{2} \text{sen}x = 0$  se  $x = 0, \pi, 2\pi$
- $y'' > 0$  se  $0 < x < \pi$ : in tale intervallo quindi il grafico è concavo verso l'alto; in  $x = \pi$  c'è un flesso (a tangente obliqua), di ordinata  $\frac{\pi}{2}$ .
- Il Grafico della funzione è il seguente:



3)

Lunghezza dell'arco AB =  $R \cdot x$   
 Perimetro settore AOB =  $2R + Rx$ .

$$\text{Area settore} = \frac{R^2 x}{2} = 100.$$

**Per via elementare:**

Il prodotto  $R^2 x$  è costante, quindi lo è anche:  
 $(2R)(Rx)$ : la somma è minima se le due quantità sono uguali: quindi  $2R = Rx$ , cioè  $x=2$ .  
 Sostituendo questo valore di  $x$  nell'area del settore si ottiene  **$R = 10 \text{ m}$** .

**Metodo delle derivate:**

Bisogna rendere minima la quantità  $2R + Rx$ ; ricavo  $x$  dall'area del settore:  $x = \frac{200}{R^2}$ .

Si ottiene la funzione:  $y = 2R + \frac{200}{R}$ , con la seguente limitazione per  $R$ :

dall'area del settore si ricava  $x = \frac{200}{R^2}$  ed essendo  $x$  nell'intervallo  $[0; 2\pi]$ , si ottiene la

limitazione  $\frac{200}{R^2} \leq 2\pi$ , quindi  $R \geq \sqrt{\frac{100}{\pi}}$ .

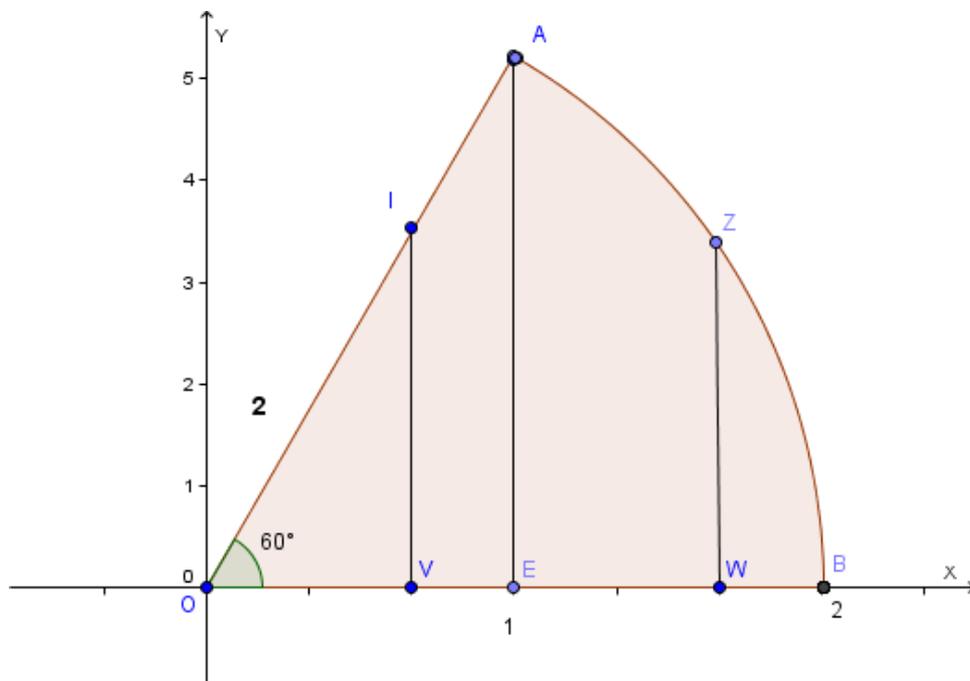
Risulta  $y' = 2 - \frac{200}{R^2} \geq 0$  se  $R \geq 10$ .

La funzione risulta decrescente da  $\sqrt{\frac{100}{\pi}} \leq R < 10$  e crescente per  $R > 10$  e quindi ha un minimo assoluto per  $R = 10$  e, sostituendo nell'area del settore, si ottiene  $x = 2$ .

Esprimiamo  $x$  in gradi sessagesimali:

$$2 : x^\circ = \pi : 180^\circ, \text{ da cui si ottiene } x = \frac{360^\circ}{\pi} \cong 115^\circ$$

4)



La retta OA ha equazione  $y = \sqrt{3}x$  e la circonferenza  $x^2 + y^2 = 4$ .

Il lato del quadrato sezione è  $y$ , quindi:

$$V = \int_0^1 y^2 dx + \int_1^2 y^2 dx = \int_0^1 (3x^2) dx + \int_1^2 (4 - x^2) dx = [x^3]_0^1 + \left[ 4x - \frac{x^3}{3} \right]_1^2 = 1 + \left( 8 - \frac{8}{3} - 4 + \frac{1}{3} \right) = \frac{8}{3}$$