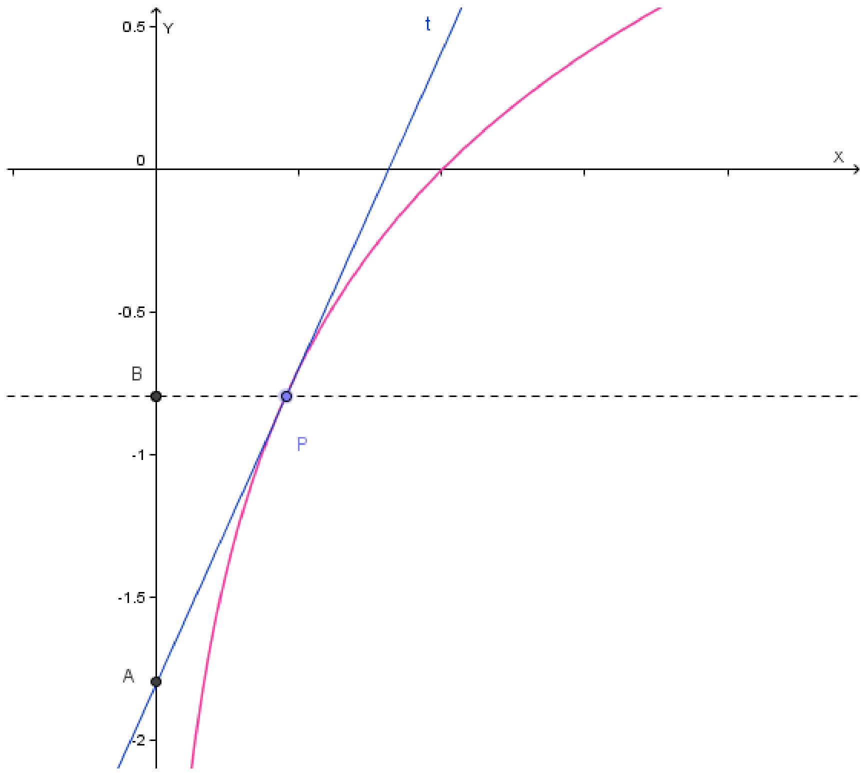
ORDINAMENTO 2009 - PROBLEMA 2

1)

f(x) = ln(x)



La tangente al grafico nel generico punto P=(t; ln t) ha equazione:

$y = \frac{1}{t}x - 1 + \ln t$

A = (0; ln t -1)

Retta per P parallela all'asse x: y = ln t

B = (0; ln t)

$\overline{AB} = y_B - y_A = \ln t - (\ln t - 1) = 1$: quindi è costante al variare di P.

Se la funzione è $g(x) = \log_a(x)$ si hanno i seguenti casi:

- **a>1**

Poiché $g'(x) = \frac{1}{x}\log_a e$, si ha:

tangente: $y = \frac{1}{t}(\log_a e)x - \log_a e + \log_a t$

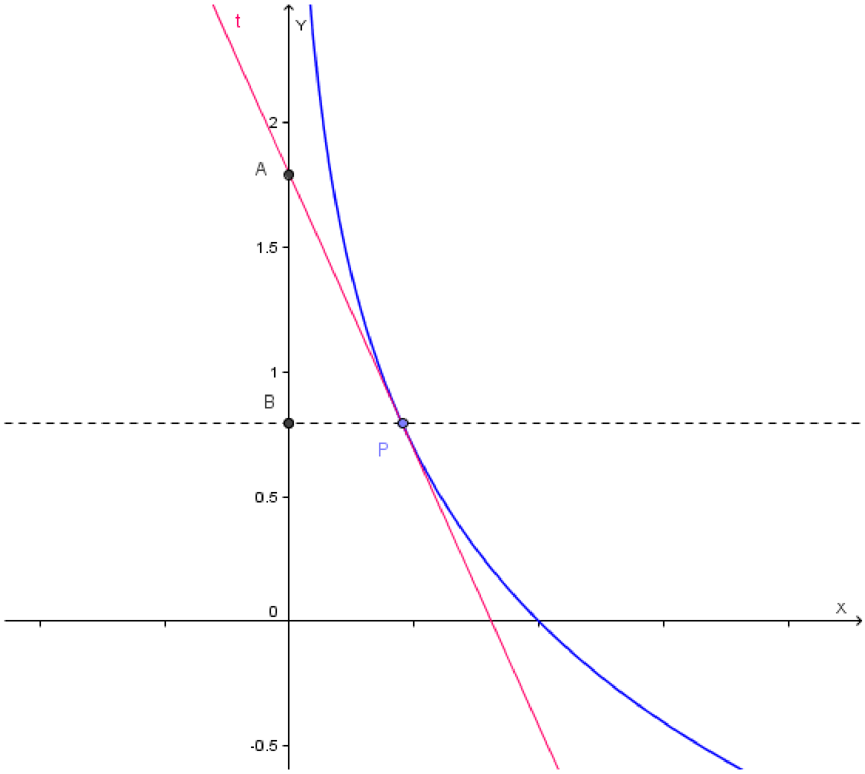
A = (t; $\log_a t - \log_a e$)

Retta per P parallela all'asse x: y = $\log_a t$

B = (0; $\log_a t$)

$\overline{AB} = y_B - y_A = \log_a t - (\log_a t - \log_a e) = \log_a e$: quindi è ancora costante costante al variare di P.

- **con 0<a<1**



tangente: $y = \frac{1}{t}(\log_a e)x - \log_a e + \log_a t$

A = (t; $\log_a t - \log_a e$)

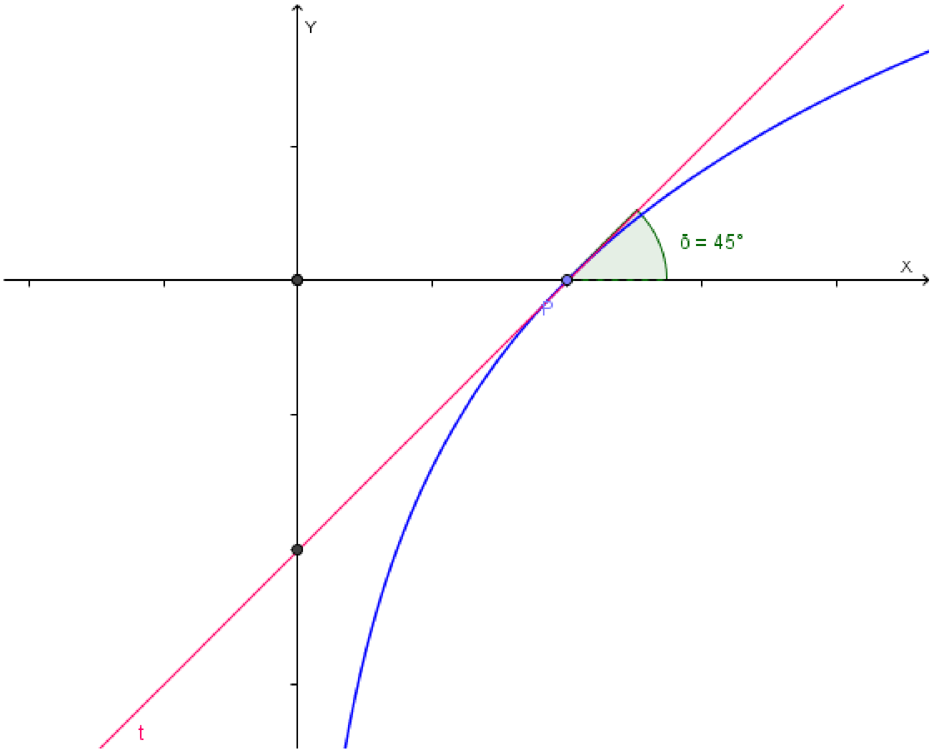
Retta per P parallela all'asse x: y = $\log_a t$

B = (0; $\log_a t$)

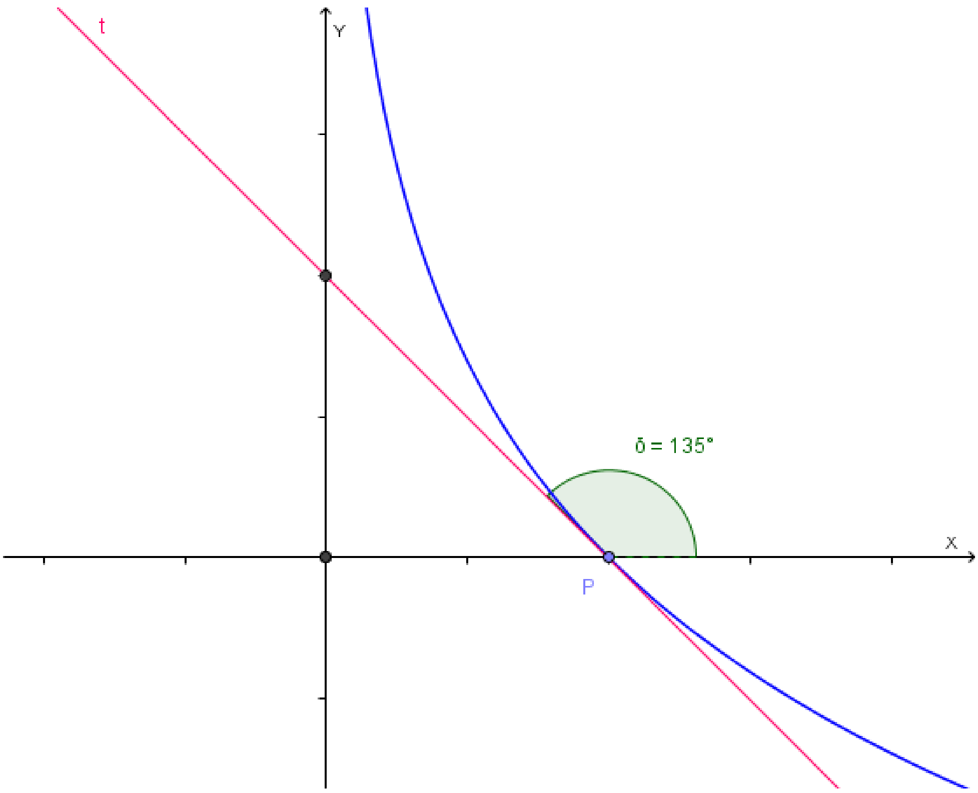
$\overline{AB} = y_A - y_B = (\log_a t - \log_a e) - \log_a t - = -\log_a e$: quindi è ancora costante costante al variare di P.

2)

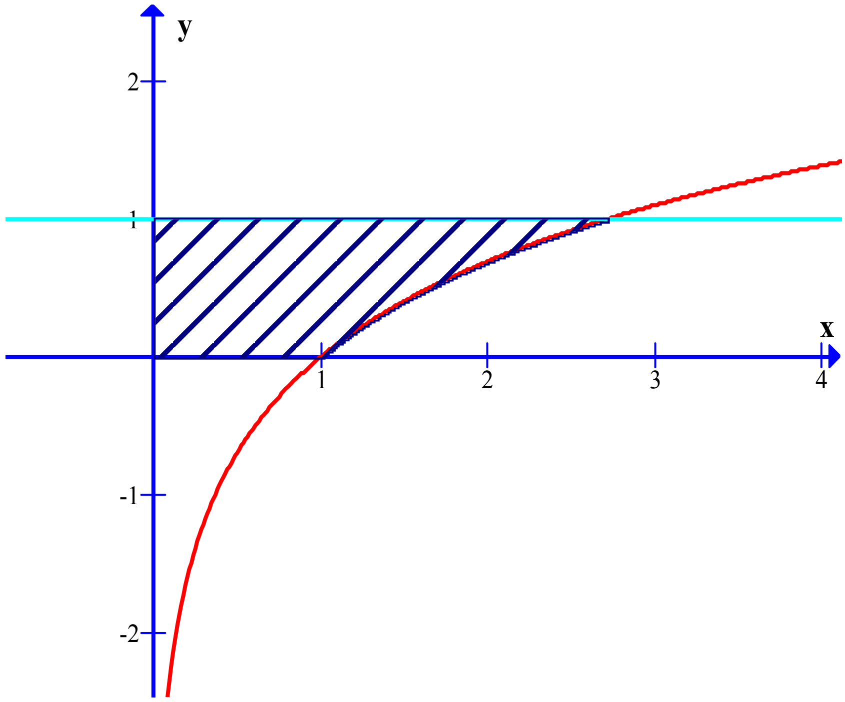
- $g'(x) = \frac{1}{x}\log_a e$, quindi $g'(1) = \log_a e = tg(45°) = 1$, quindi **a = e.**



- $g'(1) = \log_a e = tg(135°) = -1$, quindi $a = \dfrac{1}{e}$



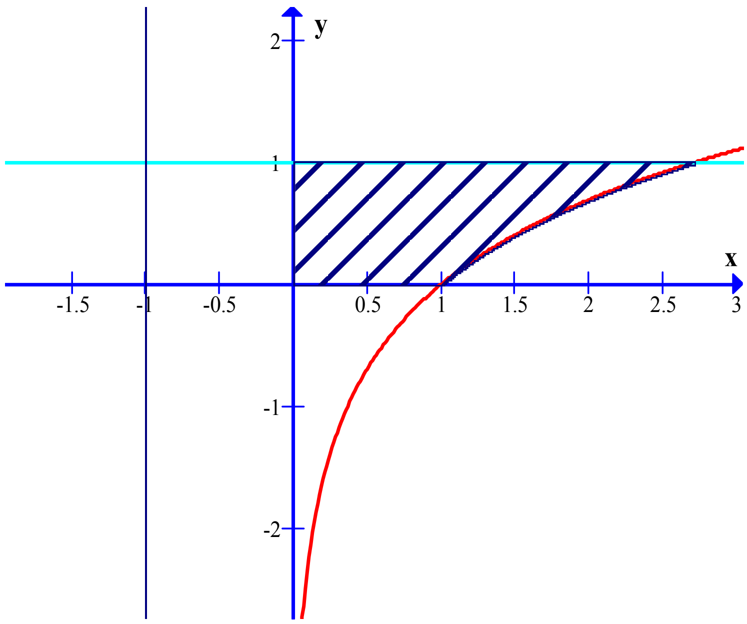
3)



L’area della regione D (tratteggiata in figura), si ottiene calcolando l’integrale (rispetto alla y):

$$\int_0^1 e^y dy = [e^y]_0^1 = e - 1$$

4)



Conviene effettuare la traslazione di assi che porta l'asse y nella retta di equazione x= -1:

x = X - 1 ; y = Y

f(x) diventa **Y = ln(X-1)** che posso esprimere nella forma: $X-1 = e^Y$, ossia **$X = e^Y+1$**
Il volume richiesto si ottiene in questo modo:

Volume = $\pi \int_0^1 X^2 dY$ - volume cilindro con raggio di base 1 e altezza 1 =

$$= \pi \int_0^1 (e^Y + 1)^2 dY - \pi = \pi \int_0^1 (e^{2Y} + 2e^Y + 1) dY - \pi = \pi[\frac{1}{2}e^{2Y} + 2e^Y + Y]_0^1 - \pi = \pi(\frac{1}{2}e^2 + 2e - \frac{5}{2})$$