ORDINAMENTO 2010

QUESITO 1

Siccome la derivata annulla le costanti e abbassa di uno l'esponente delle potenze, dopo n derivate rimarrà solo la derivata n-esima del termine di grado n.

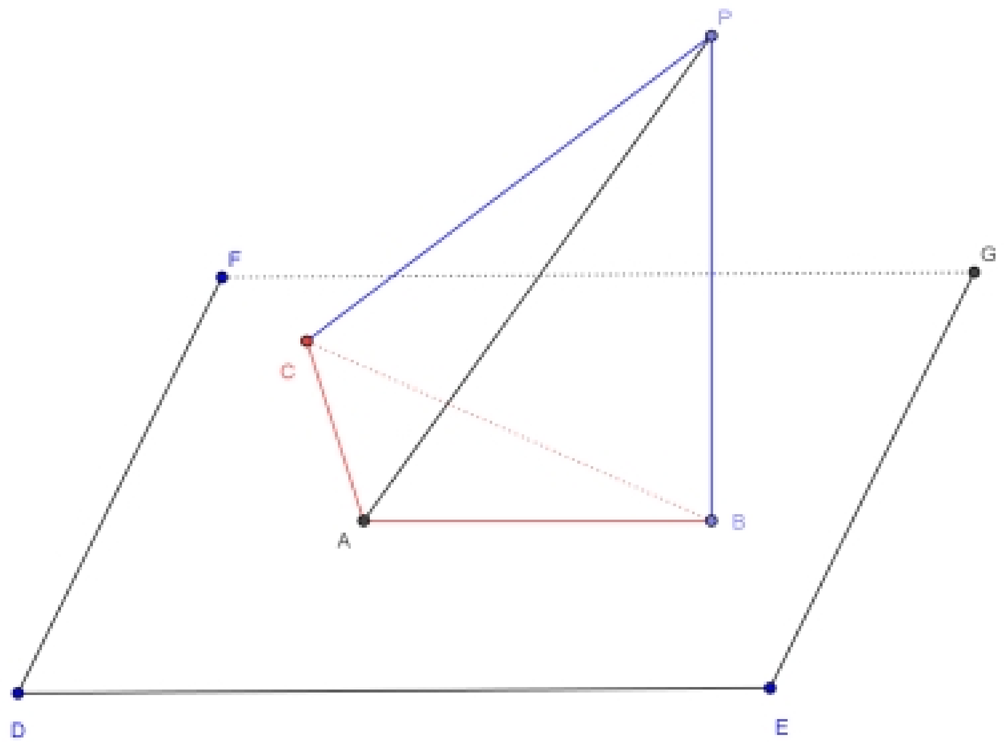
$$D(a_n x^n) = n a_n x^{n-1}$$

$$D^2(a_n x^n) = n(n-1) a_n x^{n-2}$$

e così via fino ad ottenere

$$D^n(a_n x^n) = n(n-1)\cdot \ldots 3\cdot 2\cdot 1 a_n = n! a_n$$

QUESITO 2



Siccome PB è perpendicolare al piano di ABC, è perpendicolare a qualsiasi retta passante per B appartenente al piano, quindi PB è perpendicolare ad AB e a CB: i triangoli PAB e PBC sono quindi rettangoli in B.

Siccome dal piede della perpendicolare B al piano si conduce la perpendicolare BA alla retta AC dello stesso piano, quest'ultima risulta perpendicolare al piano individuato da PB e AB (**teorema delle tre perpendicolari**): quindi CA è perpendicolare alla retta PA e pertanto CAP è rettangolo in A.

Si può alternativamente utilizzare il teorema di Pitagora per mostrare che CAP è rettangolo in A:
dal triangolo PAB: $PA^2 = PB^2 + AB^2$
dal triangolo PBC: $PC^2 = PB^2 + BC^2$.
Ricavando PB^2 dalla prima relazione e PC^2 dalla seconda si ottiene
$PC^2 = (PA^2 - AB^2) + BC^2 = PA^2 + (BC^2 - AB^2) = PA^2 + AC^2$
dove nell'ultima uguaglianza si è applicato il teorema di Pitagora al triangolo ABC.
Risulta quindi $PC^2 = PA^2 + AC^2$ che dimostra che il triangolo PAC è rettangolo in A.

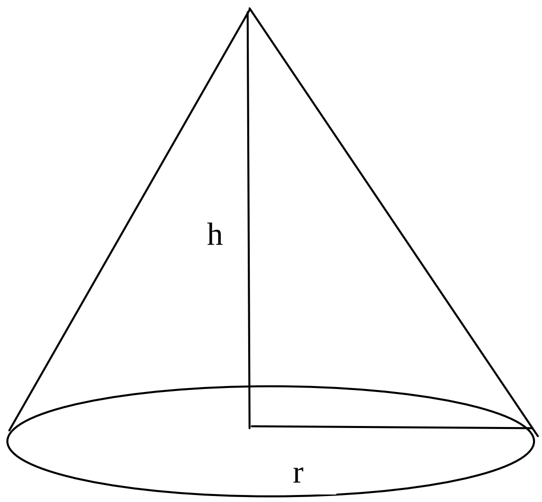
QUESITO 3

La pendenza della generica retta tangente al grafico di **f** in (x, f(x)) è pari a f'(x), ne segue che occorre cercare x tale che $2 = 3e^{3x} \Rightarrow e^{3x} = \frac{2}{3} \Rightarrow x = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{2}{3}\right)$

QUESITO 4

$$\lim_{x\to\infty} 4x\sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty} 4\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 4$$

QUESITO 5



L'apotema del cono è 80 cm=8 dm. Indichiamo con h l'altezza del cono e con r il raggio di base del cono. Si ha $r^2 = 64 - h^2$. Il volume del cono è $V(h) = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi}{3}h(64 - h^2)$.

Cerchiamo il massimo di V.

$V'(h)=\frac{\pi}{3}\left(64-3h^2\right)=0 \Leftrightarrow h=\sqrt{\frac{64}{3}}$. Essendo la derivata positiva prima di questo valore e negativa dopo si ha che esso è un massimo. Risulta quindi

$V=\frac{\pi}{3}\frac{128}{3}\sqrt{\frac{64}{3}} \approx 206.370 dm^3 = 206.370\ l$ =**capacità massima**

QUESITO 6

Il dominio della funzione coseno è tutto R. Il dominio di $\sqrt{\cos x}$ è dato da

$\cos x \geq 0$ da cui $-\frac{\pi}{2}+2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2}+2k\pi$.

QUESITO 7

Si ha h(4)=0 ed essendo un polinomio continuo si ha anche che il limite sinistro in 4 vale 0. Controlliamo il limite destro. La funzione è continua se e solo se anche questo limite vale 0. Dobbiamo quindi porre

$$\lim_{x\to 4^+} h(x)=16k-8-1=16k-9=0 \Rightarrow k=\frac{9}{16}$$

QUESITO 8

Si tratta di verificare che, se n>3:

$$\binom{n}{n-2}-\binom{n}{n-1}=\binom{n}{n-3}-\binom{n}{n-2}.$$

Equivalente a:

$$2\binom{n}{n-2}-\binom{n}{n-1}=\binom{n}{n-3}$$

$$2\frac{n!}{(n-2)!2!}-\frac{n!}{(n-1)!1!}=\frac{n!}{(n-3)!3!}$$

$$\frac{n!}{(n-2)(n-3)!}-\frac{n!}{(n-1)(n-2)(n-3)!}=\frac{n!}{(n-3)!3!}$$

Riducendo al minimo comune multiplo si arriva all’equazione:

$$n^2-9n+14=0$$

che ha le soluzioni n=2 ed n=7 **di cui è accettabile solo n=7.**

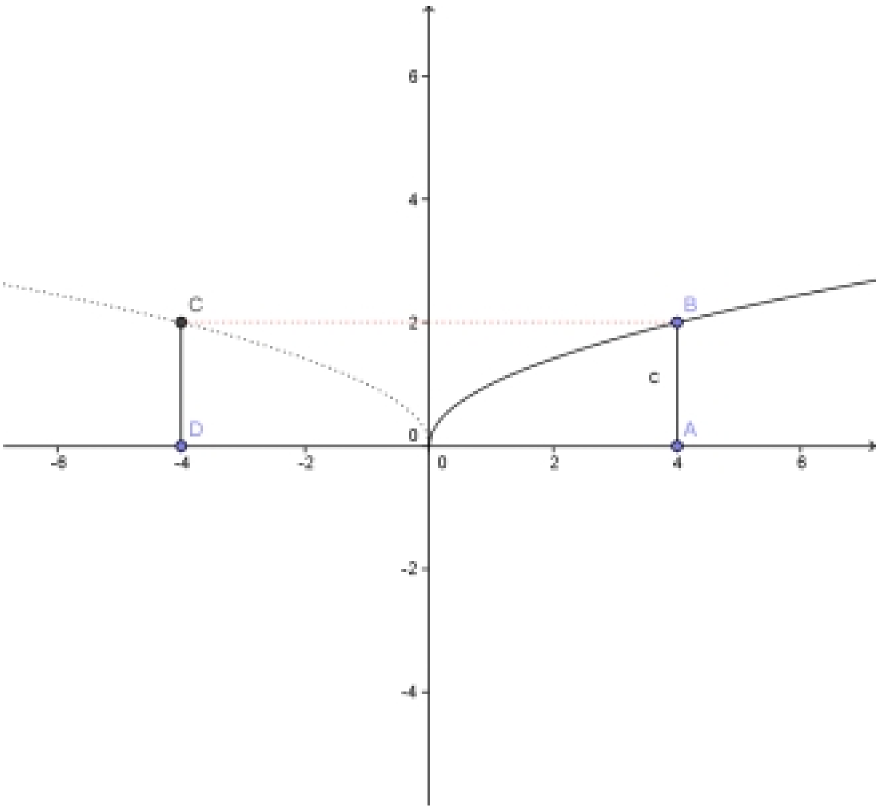
QUESITO 9

1) Per il teorema dei seni $\frac{3}{sen\gamma}=\frac{2}{sen45°}$ da cui $sen\gamma=\frac{3\sqrt{2}}{4}>1\Rightarrow$ impossibile.

2)Sempre per il teorema dei seni: $\frac{3}{sen\gamma}=\frac{2}{sen30°}$ da cui $sen\gamma=\frac{3}{4}\Rightarrow\gamma=sen^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$ quindi $\gamma_1=48{,}59°$ e $\gamma_2=\pi-\gamma_1=131{,}41°$, entrambi accettabili.

PNI

QUESITO 10



Il volume del solido generato dalla regione nella rotazione intorno all'asse y si ottiene sottraendo al volume del cilindro con raggio di base 4 e altezza 2 il volume del solido ottenuto facendo ruotare intorno all'asse y il grafico di $y=\sqrt{x}$ con x compresa tra 0 e 4.

$$Volume=32\pi-\pi\int_0^2 x^2dy=32\pi-\pi\int_0^2 y^4dy=32\pi-\pi\left[\frac{y^5}{5}\right]_0^2=32\pi-\frac{32}{5}\pi=\frac{128}{5}\pi$$

Con la collaborazione di Simona Scoleri e Angela Santamaria