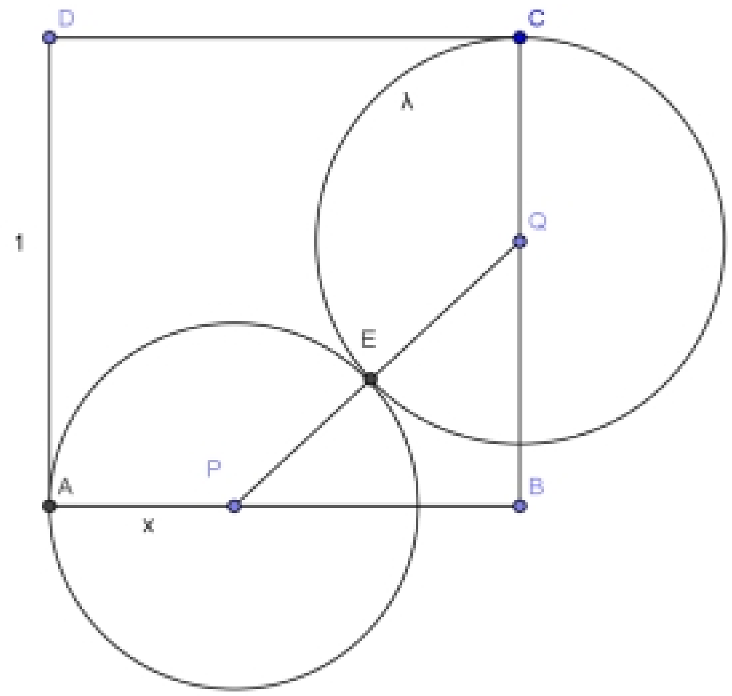
ORDINAMENTO 2010 - PROBLEMA 1

1)



QE=CQ=y=f(x)= raggio di λ

$QP^2 = PB^2 + BQ^2$

PQ = PE+EQ = x+y

PB = 1-x

BQ = 1 – y

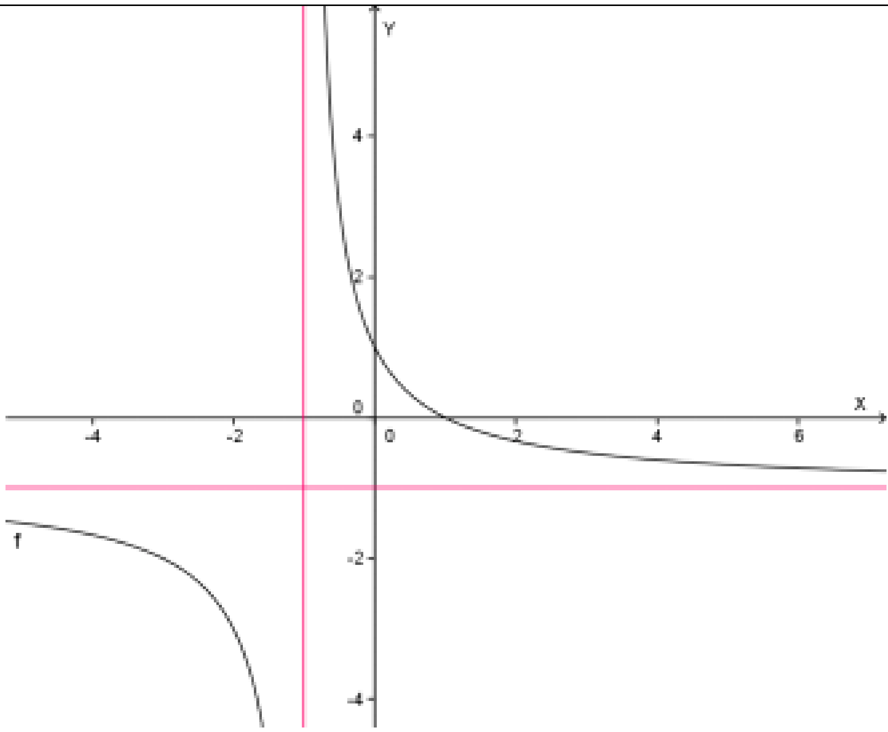
$(x+y)^2 = (1-x)^2 + (1-y)^2$

Risolvendo $y = \dfrac{1-x}{1+x}$

2)

La funzione $y = f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$ è una funzione omografica di centro (-1;-1) e asintoti x=-1 e y=-1; passa per i punti (0;1) e (1;0).

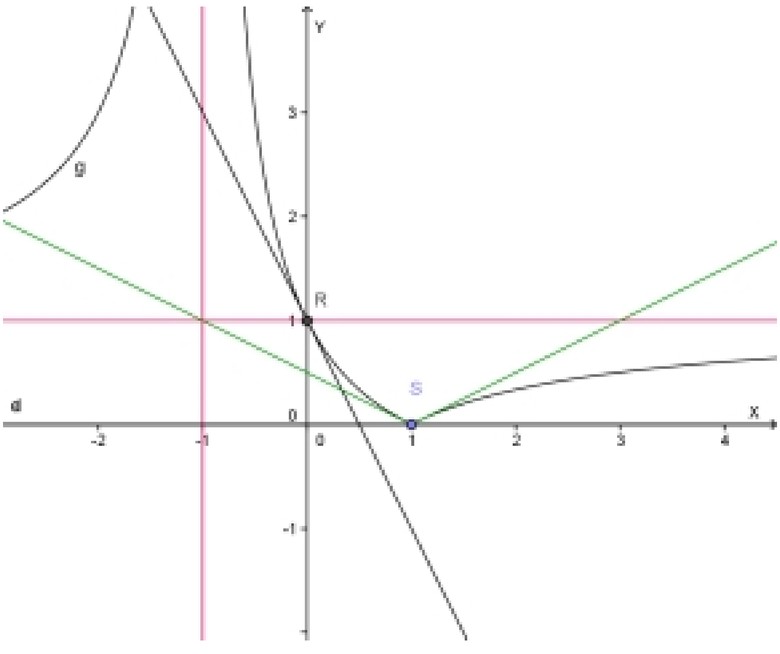
Il grafico è il seguente:



La funzione f(x) è invertibile perché realizza una corrispondenza biunivoca tra dominio e codominio.
Il grafico della funzione inversa è il simmetrico di quello di f rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante: essendo f simmetrica rispetto a tale retta il grafico della sua inversa coincide con il grafico di f.

3)

$g(x)=\left|\frac{1-x}{1+x}\right|$ Il suo grafico si ottiene da quello di f ribaltando rispetto all'asse x la parte negativa:



La tangente in R ha equazione y = -2x+1
S è un punto angoloso con semitangenti

destra: $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

sinistra: $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

4)

L'area richiesta si ottiene calcolando il seguente integrale:

$$\int_0^1 \frac{1-x}{1+x}\,dx = \int_0^1 \frac{-1-x+2}{1+x}\,dx = \int_0^1 \left(-1+\frac{2}{1+x}\right)dx = \left[-x+2\ln|1+x|\right]_0^1 = -1+2\ln 2$$