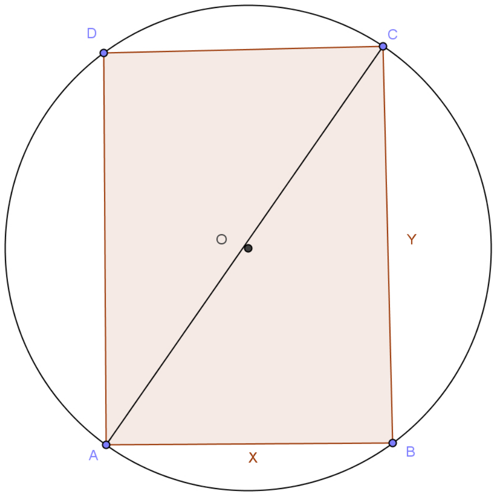
ORDINAMENTO 2011

QUESITO 1

Consideriamo la sezione della sfera e del cilindro con un piano passante per l'asse del cilindro:



Indicando con x il diametro di base del cilindro, con y la sua altezza e con R il raggio della sfera, si ha:

$x^2 + y^2 = 4R^2$ (*)

Il volume del cilindro è $V = \pi \frac{x^2}{4} y = \max$ se lo è $x^2 y = x^2 (y^2)^{\frac{1}{2}}$: essendo il prodotto di due potenze (positive) di grandezze a somma costante (x^2 e y^2), il massimo si avrà quando le basi sono proporzionali agli esponenti, cioè $\frac{x^2}{1} = \frac{y^2}{\frac{1}{2}}$ che equivale a $x^2 = 2y^2$. Sostituendo nella (*) si ottiene $y = \frac{2}{\sqrt{3}} R$ e $x = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} R$. Il cilindro di volume massimo sarà quindi uguale a: $\frac{4}{9}\sqrt{3}\,\pi R^3$

Ponendo R=60 cm = 6 dm, troviamo il volume in decimetri cubi e quindi la capacità in litri:

V(max) = $96\sqrt{3}\,\pi\, dm^3 \cong 522$ litri.

QUESITO 2

Il quadrato della distanza d(x) del generico punto della curva dal punto (4;0) è dato da:

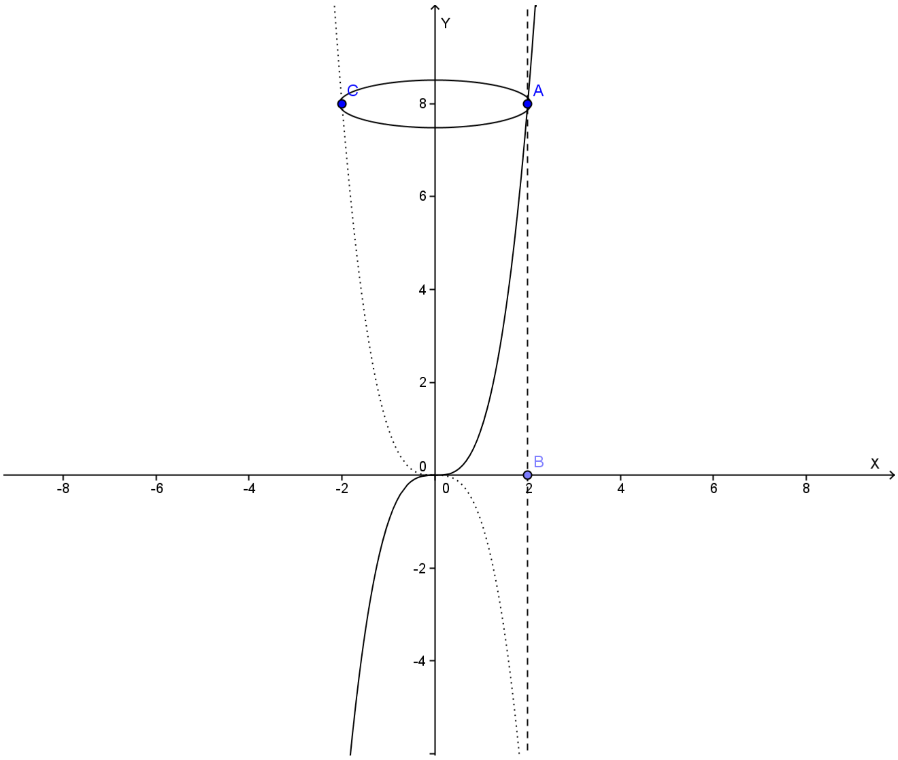
$d^2 = (x-4)^2 + (\sqrt{x} - 0)^2 = x^2 - 7x + 16$. La distanza è minima quando lo è il suo quadrato, cioè per

x = 7/2 (… il minimo è nel vertice della parabola). Il punto richiesto ha quindi coordinate $\left(\frac{7}{2};\sqrt{\frac{7}{2}}\right)$.

QUESITO 3

Il volume richiesto si ottiene sottraendo al volume del cilindro di raggio 2 e altezza 8 (generato dalla rotazione attorno all'asse y del segmento AB) il volume del solido ottenuto dalla rotazione attorno all'asse y dell'arco di equazione $x=\sqrt[3]{y}$ relativo all'intervallo [0;8].

Volume = $\pi(2)^2\cdot 8-\pi\int_0^8\left(\sqrt[3]{y}\right)^2 dy=32\pi-\frac{96}{5}\pi=\frac{64}{5}\pi\cong 40$



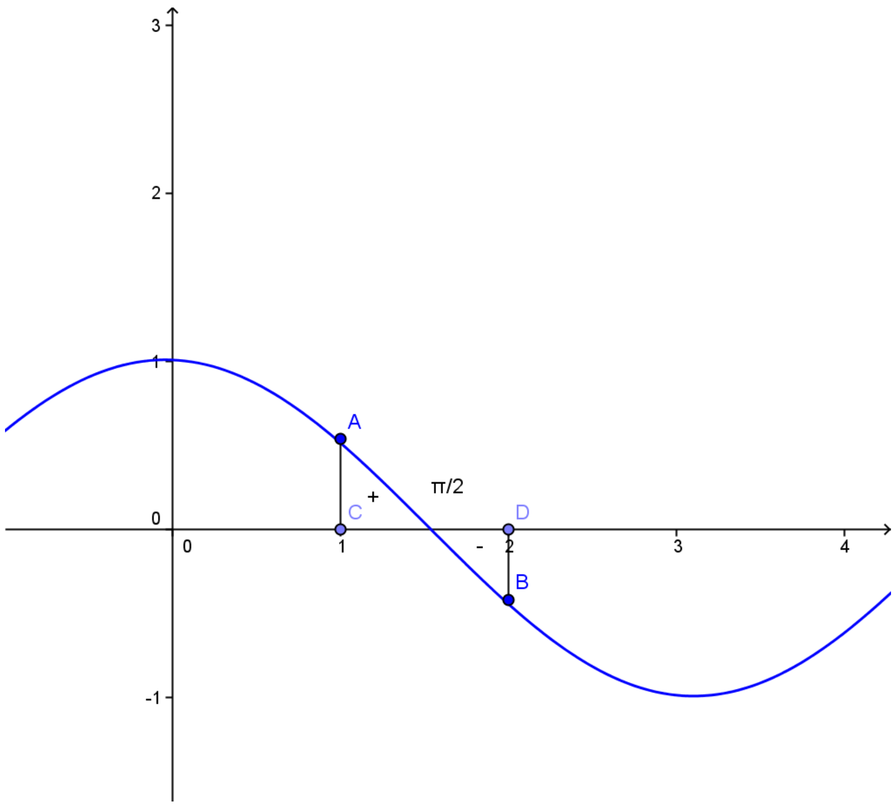
QUESITO 4

Basta risolvere l'equazione $\binom{n}{4}=\binom{n}{3}$, con n numero naturale maggiore o uguale a 4. Siccome $\binom{n}{4}=\binom{n}{n-4}$ è sufficiente che sia n-4 = 3, da cui n = 7.

QUESITO 5

L'area richiesta è data da: $\int_1^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{2} \cos x\, dx = [senx]_1^{\frac{\pi}{2}} - [senx]_{\frac{\pi}{2}}^{2} = \ldots = 2 - sen1 - sen2 \cong 0.25$

(si osservi la figura seguente …)



QUESITO 6

Il limite in questione è quello che conduce alla derivata di tg x in x=a, quindi vale $1 + tg^2 a = \frac{1}{\cos^2 a}$.

Il calcolo diretto può essere effettuato utilizzando la regola di de L'Hôpital (dopo aver verificato che sono valide le condizioni: il limite si presenta nella forma $\frac{0}{0}$, numeratore e denominatore sono continue e derivabili in un intorno di x=a e in tale intorno la derivata del denominatore non si annulla):

$\lim_{x \to a} \frac{1 + tg^2 x}{1} = 1 + tg^2 a$ **(N.B. a deve essere diverso da $\frac{\pi}{2} + k\pi$, altrimenti limite non ha senso).**

QUESITO 7

Consideriamo la funzione di equazione $f(x)=x^{2011}+2011x+12$: essa è continua nell'intervallo chiuso e limitato [-1;0] ed assume agli estremi di tale intervallo valori di segno opposto:
f(-1)= -2000<0
f(0)=12>0
Quindi, per il Teorema degli zeri, l'equazione data ha **almeno** una radice tra -1 e 0.
Per verificare l'unicità di tale radice studiamo la derivata prima:
$f'(x)=2011x^{2010}+2011$. La derivata è sempre positiva, quindi la funzione è sempre crescente: ne segue che il grafico interseca l'asse delle x in un solo punto e pertanto la soluzione dell'equazione è unica.

QUESITO 8

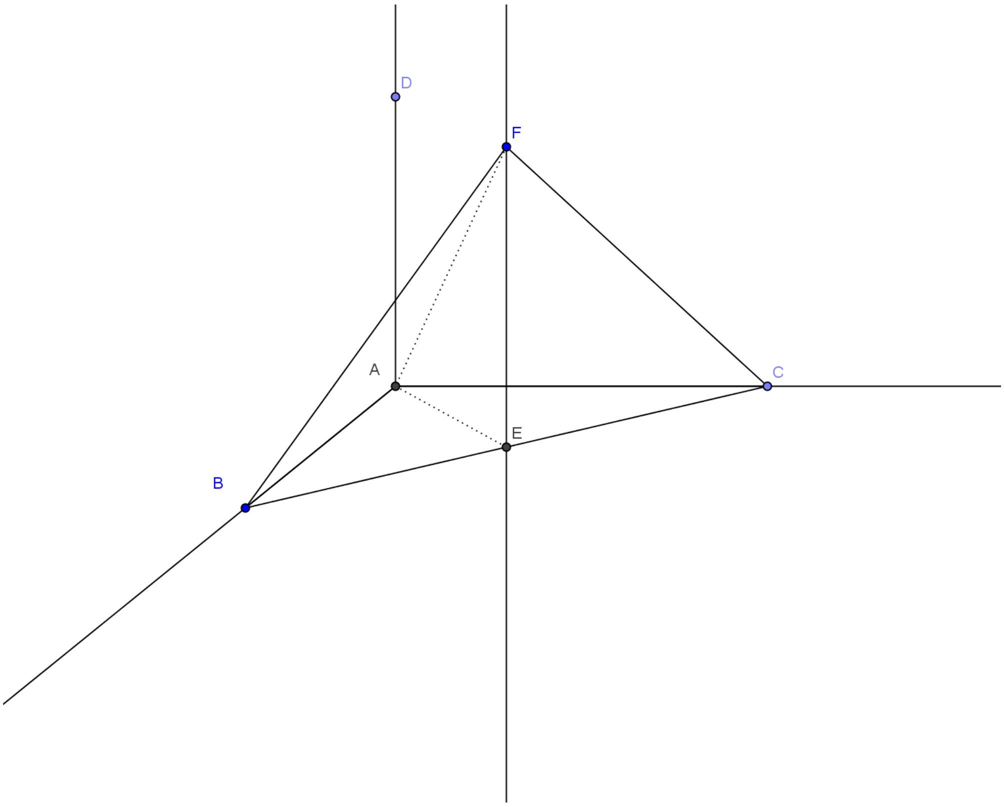
Si tratta di un classico problema di geometria elementare che consiste nell'impossibilità di costruire con riga e compasso un quadrato equivalente ad un cerchio; tale costruzione richiederebbe la costruzione del numero $\sqrt{\pi}$, dimostrata impossibile (usando solo riga e compasso): Lindemann dimostra nel 1882 che π è trascendente, quindi non costruibile.

L'espressione "*quadratura del cerchio*" è spesso citata per indicare un'impresa impossibile.

QUESITO 9

Indichiamo con E il punto medio dell'ipotenusa del triangolo rettangolo ABC; la mediana AE risulta uguale alla metà dell'ipotenusa. Se la retta FE è perpendicolare in E al piano del triangolo ABC i tre triangoli FEB, FEC ed FEA (tutti rettangoli in E) sono congruenti poiché hanno i due cateti rispettivamente congruenti. Pertanto, per ogni punto F della retta FE, le distanze FA, FB ed FC sono uguali.

Per dimostrare che la retta in questione è il luogo richiesto dobbiamo dimostrare che ogni punto equidistante da A, B e C si trova su tale retta. A tale scopo basta notare che il luogo dei punti equidistanti da A e B è il piano perpendicolare ad AB nel suo punto medio, analogamente per A e C e per B e C: i punti equidistanti da A, B e C appartengono contemporaneamente a questi tre piani, che hanno in comune proprio la retta perpendicolare al piano del triangolo ABC nel punto medio E dell'ipotenusa BC.



QUESITO 10

La risposta corretta è la **D (f è la III, f ‘ la II ed f ‘’ la I)**. Infatti:

1) f non può essere la **I**, poiché è sempre crescente, quindi la f ‘ dovrebbe essere positiva o nulla: ciò non si verifica né per la **II** né per la **III**.
2) f non può essere la **II**, perché essendo la concavità sempre verso l’alto, la f ‘’ dovrebbe essere positiva o nulla: ciò non si verifica né per la **I** né per la **III**.
3) f è la **III**: avendo la concavità verso l’alto per x>0 e verso il basso per x<0, la f ‘’ è positiva per x>0 e negativa per x<0: ciò si verifica per la **I**, che è quindi f ‘ ‘; la **III** è decrescente tra l’ascissa del massimo e l’ascissa del minimo, quindi in tale intervallo la f ‘ risulta negativa, come avviene per la **II**.

Con la collaborazione di Simona Scoleri e Angela Santamaria