ORDINAMENTO 2011 - PROBLEMA 1

1)

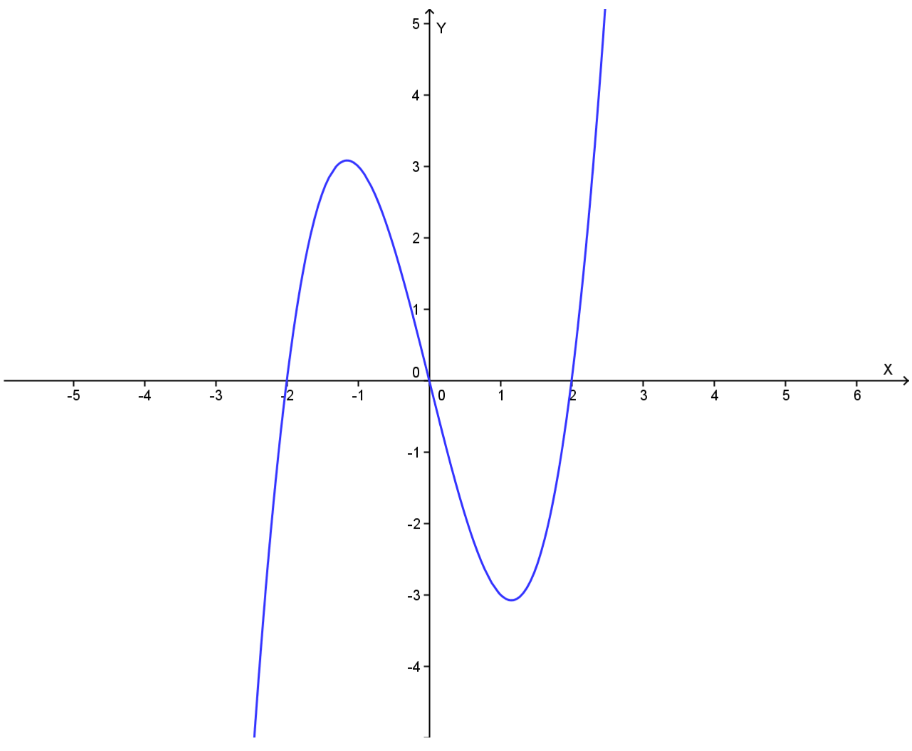
$f(x) = x^3 - 4x \qquad g(x) = sen(\pi x)$

La prima funzione è una cubica simmetrica rispetto all'origine, definita su tutto R, con limiti +infinito e -infinito rispettivamente a +infinito e –infinito. Le intersezioni con l'asse x sono in x=0,-2,2.
Risulta poi:

$f'(x) = 3x^2 - 4$: dallo studio della derivata prima si trovano il massimo ed il minimo relativi che sono rispettivamente $M = \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}; \frac{16\sqrt{3}}{9}\right)$ ed $m = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}; -\frac{16\sqrt{3}}{9}\right)$

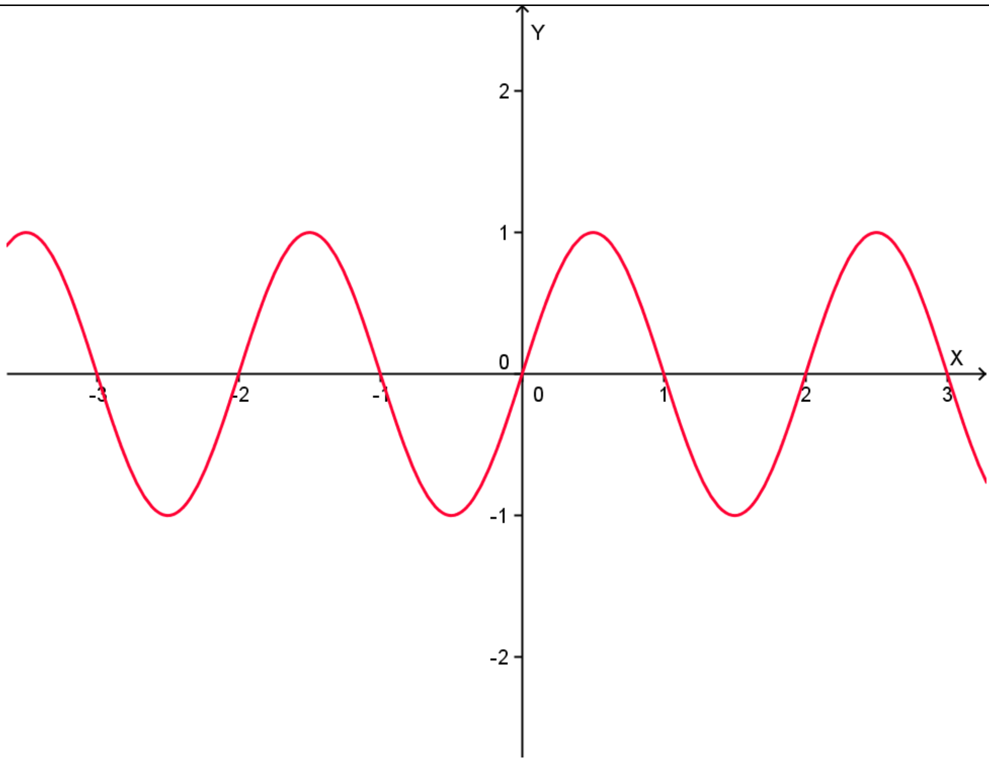
$f''(x) = 6x$, flesso nell'origine, concavità verso l'alto per x>0.

Il grafico è il seguente:

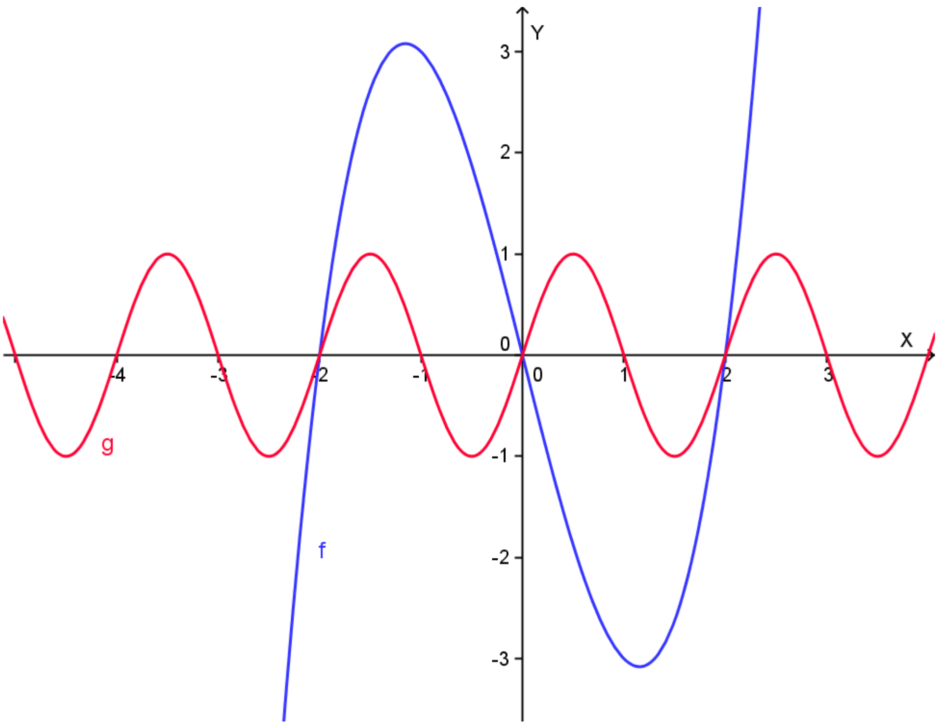


La seconda funzione, $g(x) = sen(\pi x)$, è una funzione sinusoidale di periodo $T = \frac{2\pi}{\pi} = 2$.

Il suo grafico è il seguente:



I due grafici, nello stesso sistema di riferimento, sono i seguenti:



2)

Le intersezioni del grafico della f con la retta y = - 3 si ottengono risolvendo il sistema:

$\begin{cases} y = x^3 - 4x \\ y = -3 \end{cases}$, che conduce all'equazione: $x^3 - 4x + 3 = 0$. Quest'ultima si abbassa di grado con x=1 mediante la regola di Ruffini: ($(x-1)(x^2+x-3)=0$. Le soluzioni sono:

x=1, $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$.

I punti del grafico della g a tangente orizzontale, nell'intervallo, [-6 ; 6] sono i punti per cui $\sin(\pi x)=\pm 1$.
Quelli con ordinata uguale a 1 hanno ascisse x=1/2, 5/2, 9/2 oppure x=-3/2, -7/2, -11/2.
Quelli con ordinata uguale a -1 hanno ascisse x=-1/2, -5/2, -9/2 oppure x=3/2, 7/2, 11/2.

3)

La regione R richiesta si ottiene calcolando l'integrale

$\int_0^2 (g(x)-f(x))dx$, oppure più semplicemente, come si osserva dalla figura:

$$-\int_0^2 (f(x))dx = -\int_0^2 (x^3-4x)dx = -\left[\frac{x^4}{4}-2x^2\right]_0^2 = 4$$

4)

Il volume richiesto si calcola mediante l'integrale definito: $\int_0^2 (g(x)-f(x))h(x)dx$, poiché può essere visto come somma di infiniti rettangoli di dimensioni (g(x)-f(x)) e h(x), somma estesa all'intervallo [0;2].
L'integrale da calcolare è il seguente:

$$\int_0^2 \left(\sin(\pi x)-(x^3-4x)\right)(3-x)dx = \int_0^2 (\sin(\pi x))(3-x)dx - \int_0^2 \left(3x^3-12x-x^4+4x^2\right)dx =$$
$$\frac{2}{\pi}+\frac{116}{15}\cong 8.370$$

(il primo integrale si calcola per parti …).

Supponendo le misure in metri, il volume della vasca è pari a $\dfrac{2}{\pi}+\dfrac{116}{15}\cong 8.370\ m^3 = 8370\ litri$