ORDINAMENTO 2012

QUESITO 1

Il limite indicato rappresenta la derivata della funzione $f(x)=5x^4$ nel punto $x=\frac{1}{2}$. Il suo valore è quindi dato dal valore di $f'(x)=20x^3$ in $x=\frac{1}{2}$, che è pari a $\frac{5}{2}$. Calcoliamo il limite direttamente:

$$\lim_{h\to 0}\frac{5\left(\frac{1}{2}+h\right)^4-5\left(\frac{1}{2}\right)^4}{h}=\lim_{h\to 0}5\frac{\left(\left(\frac{1}{2}+h\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)\left(\left(\frac{1}{2}+h\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}5\frac{\left(h^2+h\right)\left(h^2+h+\frac{1}{2}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}5\frac{h(h\ +1)\left(h^2+h+\frac{1}{2}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}5(h\ +1)\left(h^2+h+\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{2}$$

QUESITO 2

Per il significato di *asintoto* si rimanda al seguente articolo di “matefilia”:
http://www.matefilia.it/argomen/asintoti/asintoti.htm

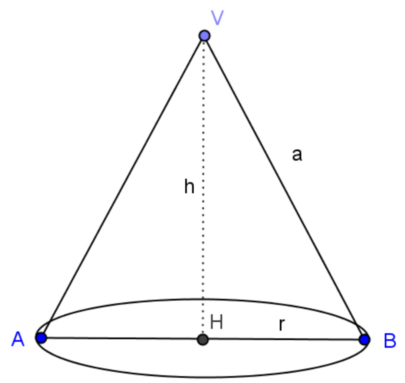
Una possibile funzione con due asintoti verticali (x=1 e x=-1) ed uno orizzontale (y=1) è $f(x)=\frac{x^2}{x^2-1}$

QUESITO 3

L’accelerazione al tempo t=4 è data dalla derivata seconda calcolata in t=4. Risulta:

$s'(t)=20(-e^{-\frac{t}{2}}+1)$; $s''(t)=20(\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}})$; a(4)=s”(4)=$10\cdot e^{-2}\cong 1.35$

QUESITO 4



$V = \frac{1}{3}\pi\, r^2\, h = \frac{1}{3}\pi\,(a^2 - h^2)\,h$, che è massimo se lo è $y = (a^2 - h^2)\,h$ (a>h).

$y' = -2h^2 + (a^2 - h^2) = a^2 - 3h^2 \geq 0$ quando $3h^2 \leq 1$ quindi (tenendo presente che h è positiva)

$h \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$; il massimo si ha quindi per $h = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Per tale valore il volume è:

$V = \frac{1}{3}\pi\,(1 - \frac{1}{3})\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}m^3 = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}} \cdot 1000\,l \cong 403\,l$

QUESITO 5

I segmenti richiesti sono tanti quante le combinazioni senza ripetizioni di n oggetti a 2 a 2: $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2!}$

Il numero dei triangoli richiesti è pari alle combinazioni senza ripetizioni di n oggetti a 3 a 3:

$\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$

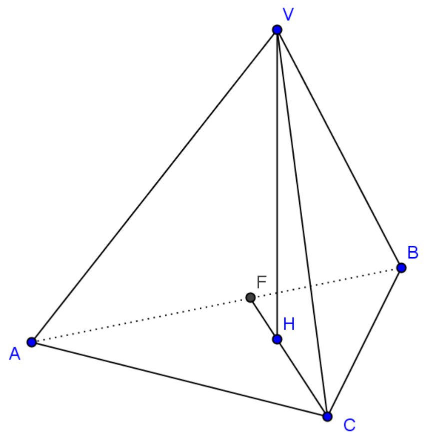
Il numero dei tetraedri è pari alle combinazioni senza ripetizioni di n oggetti a 4 a 4:

$\binom{n}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}$

QUESITO 6

Poiché $sen x \cos x = \frac{1}{2} sen 2x$ e $\cos^2 x - sen^2 x = \cos 2x$, semplificando risulta f(x)=-17, quindi f'(x)=0.

QUESITO 7



Posto VC=l, esprimiamo CH in funzione di l.

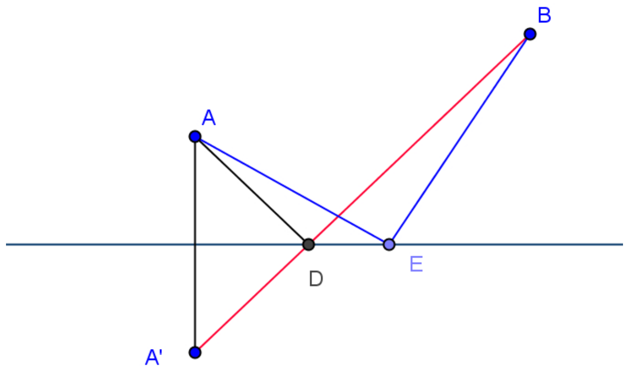
Intanto notiamo che H è il baricentro del triangolo equilatero ABC, quindi CH=2HF. L'altezza CF del triangolo equilatero è data da: $\frac{l}{2}\sqrt{3}$; quindi $CH = (2/3)CF = \frac{l}{3}\sqrt{3}$.

Detto α l'angolo tra VH e VC, risulta: $sen\alpha = \frac{HC}{VC} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ da cui $\alpha = arcsen(\frac{\sqrt{3}}{3}) \cong 35°$

QUESITO 8

Il valor medio richiesto si ottiene calcolando il seguente integrale: $\frac{\int_1^e \frac{1}{x}dx}{e-1} = \frac{[\ln|x|]_1^e}{e-1} = \frac{1}{e-1}$

QUESITO 9



Indicato con A' il simmetrico di A rispetto alla retta r data e congiungendo A' con B, otteniamo il punto D tale che AD+DB risulti minimo. Infatti preso un qualunque altro punto E sulla retta, risulta: AE+BE=A'E+BE$\geq$A'B=A'D+DB=AD+DB.

QUESITO 10

L'unica funzione positiva per ogni x reale è la A. Infatti risulta $-1 \leq sen(x^2+1) \leq 1$ ed il coseno per tali valori è sempre positivo (il coseno è positivo nell'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, che contiene l'intervallo [-1;1].
La B è errata perché il seno di un numero dell'intervallo [-1;1] non è sempre positivo.
La C è errata perché l'argomento del seno è un numero >0, e quindi il seno non è sempre positivo.
La D è errata per un motivo analogo relativo alla funzione coseno.

Con la collaborazione di Angela Santamaria