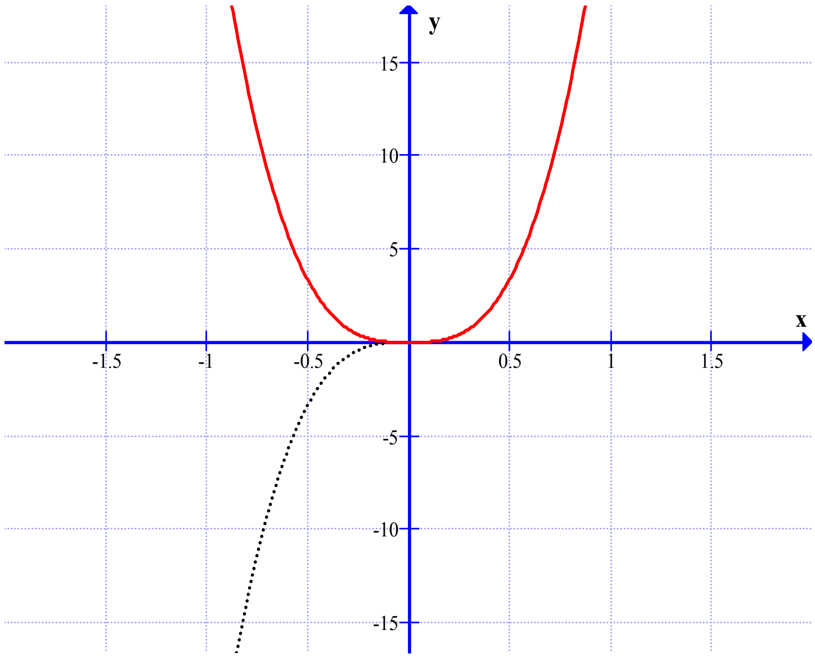
ORDINAMENTO 2012 - PROBLEMA 1

1)

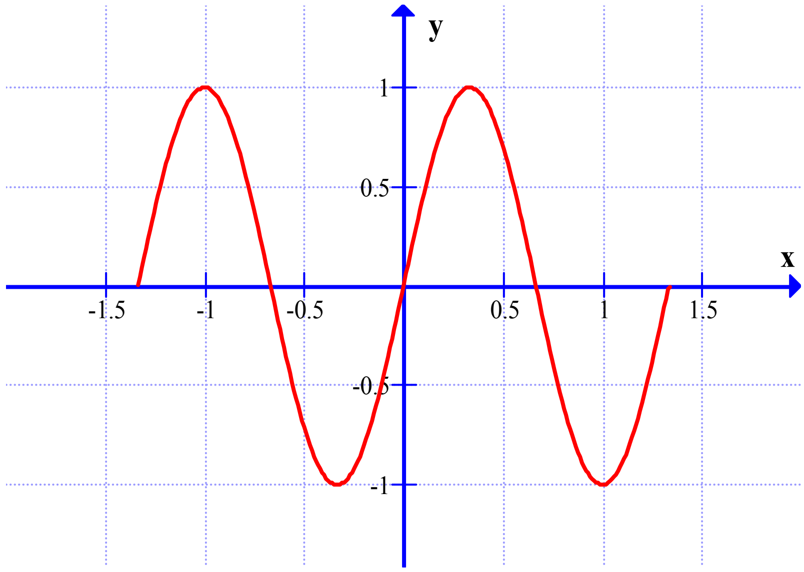
$f(x) = |27x^3|$, $g(x) = sen\left(\frac{3}{2}\pi x\right)$

Il periodo T della funzione g è dato da $T = \frac{2\pi}{\frac{3}{2}\pi} = \frac{4}{3}$

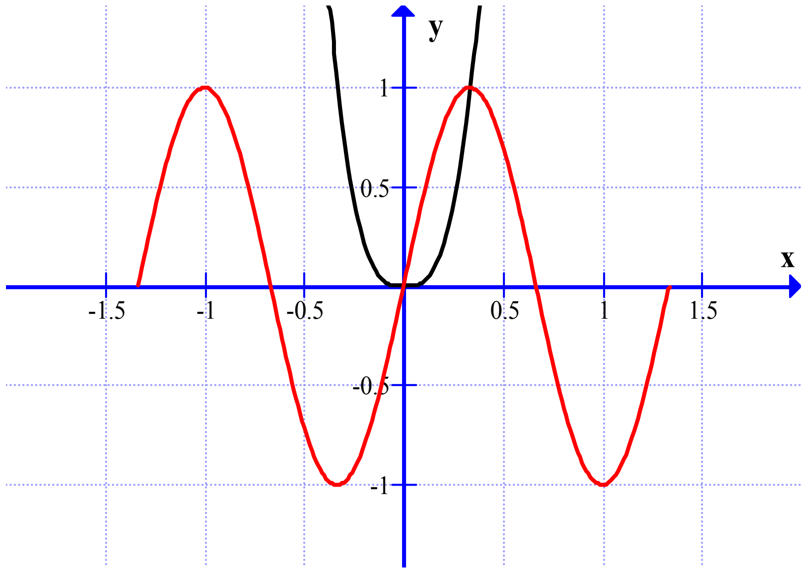
Il grafico di f (in rosso) si ottiene dal grafico della funzione di equazione $y = 27x^3$ (cubica con flesso a tangente orizzontale in O, dispari, passante per il punto di coordinate $\left(\frac{1}{3};1\right)$) confermando la parte positiva e ribaltando rispetto all'asse x la parte negativa (tratteggiata in figura). Nell'origine non è presente punto angoloso e si tratta di una funzione pari.



Il grafico di g, funzione sinusoidale di periodo 4/3, è il seguente:



I due grafici nello stesso sistema di riferimento sono indicati nella seguente figura:



2)

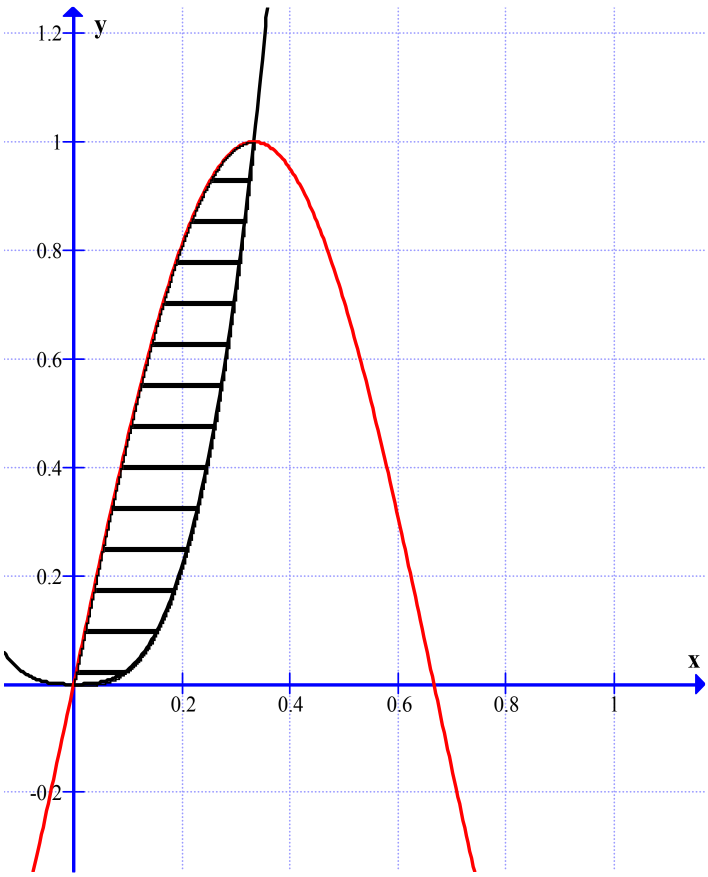
La retta r, tangente al grafico di f nel punto $\left(\frac{1}{3};1\right)$, ha coefficiente angolare m=f '(1/3); per x>0 l'equazione di f è $y = 27x^3$, quindi $f'(x) = 81x^2$, da cui m=f '(1/3)=9; r ha quindi equazione: y-1=9(x-1/3), cioè
R: **y = 9x – 2.**

La retta s, tangente al grafico di g nel punto $\left(\frac{1}{3};1\right)$, ha coefficiente angolare m=g '(1/3);

$g'(x) = \frac{3}{2}\pi\cos\left(\frac{3}{2}\pi x\right)$, quindi m=g'(1/3)= **0.** s ha quindi equazione: **y = 1.**

Siccome la s è parallela all'asse delle x, la tangente dell'angolo acuto formato dalle due rette è dato dal coefficiente angolare della r: $tg\alpha = 9 \Rightarrow \quad \alpha = arctg(9) \cong 83{,}66° \cong 83°40'$.

3)



Per trovare l'area della regione R si calcola il seguente integrale:

$$\int_0^{\frac{1}{3}}\left(sen\left(\frac{3}{2}\pi x\right)-27x^3\right)dx=\left[-\frac{2}{3\pi}\cos\left(\frac{3}{2}\pi x\right)-\frac{27}{4}x^4\right]_0^{\frac{1}{3}}=\cdots=\frac{8-\pi}{12\pi}$$

4)

Il volume del solido S, ottenuto ruotando la regione R attorno all'asse x si calcola mediante l'integrale:

$$\pi\int_0^{\frac{1}{3}}\left(g^2(x)\ -f^2(x)\ \right)dx=\pi\int_0^{\frac{1}{3}}\left(sen^2\left(\frac{3}{2}\pi x\right)-\left(27x^3\right)^2\right)dx$$

N.B. Il volume del solido ottenuto dalla rotazione della regione delimitata dall'asse x, dalle rette x=a e x=b e dal grafico di una funzione f è dato da: $\pi\int_a^b f^2(x)\ \ dx$, che equivale alla somma di infiniti cilindretti di raggio $f(x)$ e altezza dx: $\pi\, f^2(x)dx$; tale somma va estesa all'intervallo [a;b].

Calcoliamo ora il volume del solido T, ottenuto ruotando la regione R attorno all'asse y. Notiamo che nell'intervallo delle ascisse [0;1/3] la f e la g sono invertibili ed hanno come codominio l'intervallo delle ordinate [0;1].

Le funzioni inverse sono: $f^{-1}(y)=\frac{1}{3}\sqrt[3]{y}$ e $g^{-1}(y)=\frac{2}{3\pi}arcsen(y)$.

Il volume di T si calcola quindi mediante l'integrale:

$$\pi\int_0^1\left(\left(\left(\frac{1}{3}\right)\sqrt[3]{y}\right)^2-\left(\frac{2}{3\pi}arcsen(y)\right)^2\right)dx$$

N.B. Il calcolo del volume di T sarebbe più semplice utilizzando il metodo dei "gusci cilindrici", che porta al calcolo del seguente integrale:

$$2\pi\int_0^{\frac{1}{3}}x(g(x)-f(x))dx=2\pi\int_0^{\frac{1}{3}}x\left(sen\left(\frac{2}{3}\pi x\right)-27x^3\right)dx$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria