ORDINAMENTO 2012 - PROBLEMA 2

1)

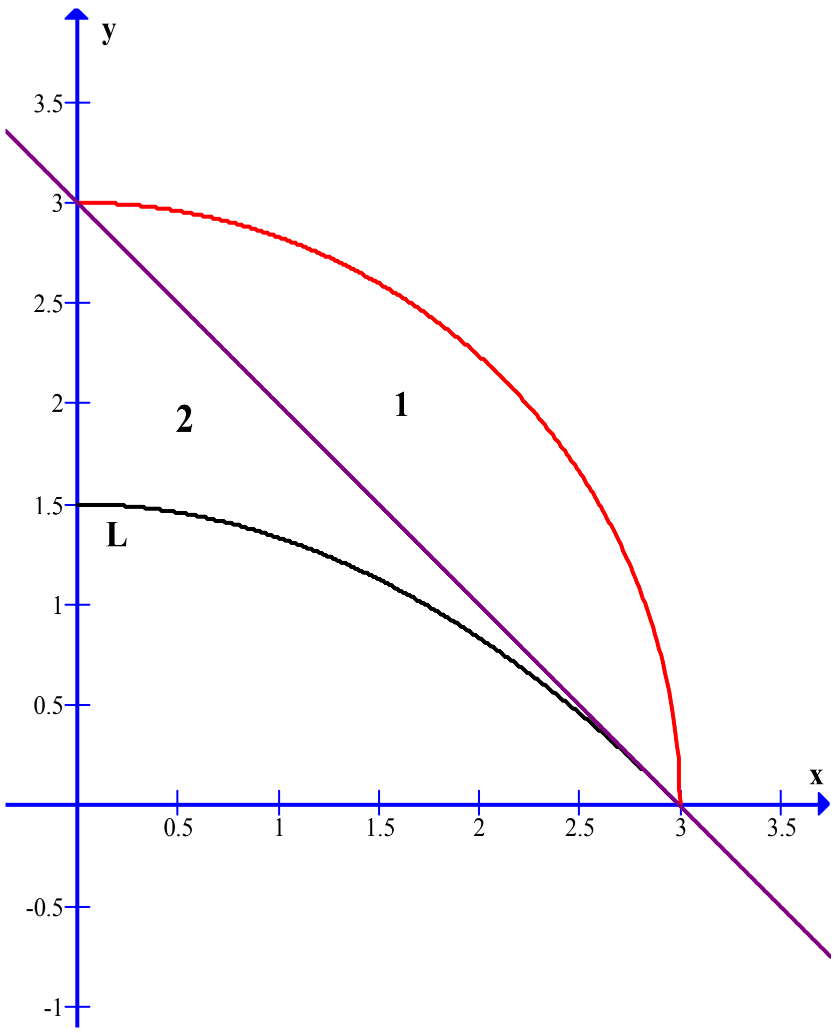
A=(3;0), B=(0;3); L: $x^2 = 9 - 6y$ (con estremi A e il punto (0;3/2).

La circonferenza di estremi A e B e centro O ha equazione: $x^2 + y^2 = 9$.

Troviamo la retta r, tangente in A ad L.

L: $y = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{3}{2}$; $y' = -\frac{1}{3}x$; $m = y'(3) = -1$; **r: y = -x + 3.**

La parabola ha vertice in (0;3/2) e taglia l'asse delle ascisse nei punti (3;0) e (-3;0).
Rappresentiamo nello stesso sistema di riferimento la parabola, la circonferenza e la retta r:



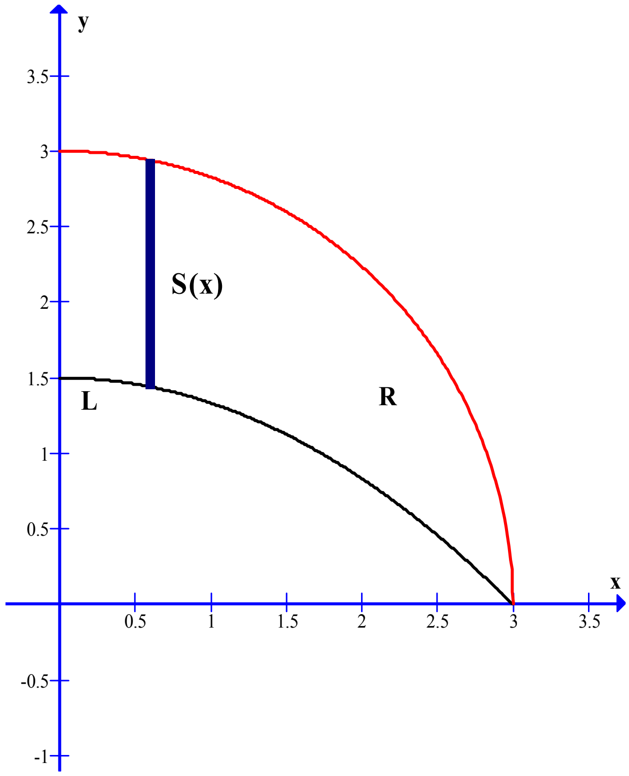
Calcoliamo le due aree richieste:

A1= un quarto di cerchio di raggio 3 – triangolo rettangolo di cateti 3 e 3 = $\frac{9\pi}{4} - \frac{9}{2}$

A2= area del triangolo rettangolo di cateti 3 e 3 – metà segmento parabolico di base 6 e altezza 3/2 =

$\frac{9}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\cdot 6\cdot \frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}$.

2)



$S(x)=e^{5-3x}$; il volume del solido W si ottiene mediante l'integrale:

$$Volume(W)=\int_0^3 S(x)dx=\int_0^3 e^{5-3x}dx=\left[-\frac{1}{3}e^{5-3x}\right]_0^3=\cdots=\frac{1}{3}\left(e^5-e^{-4}\right)$$

3)

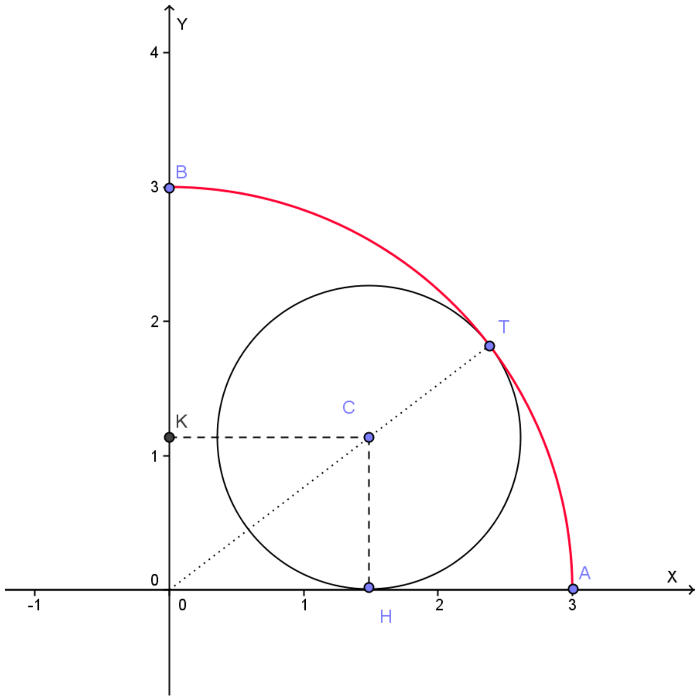
La regione R, ruotando attorno all'asse x, genera un solido il cui volume è dato dalla differenza tra il volume della semisfera di raggio 3 ed il volume ottenuto dalla rotazione della regione delimitata da L e dagli assi cartesiani.

$$V(R)=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi\cdot 3^3\right)-\pi\int_0^3\left(-\frac{1}{6}x^2+\frac{3}{2}\right)^2dx=18\pi-\pi\int_0^3\left(\frac{1}{36}x^4-\frac{1}{2}x^2+\frac{9}{4}\right)dx=$$

$$=18\pi-\pi\left[\frac{x^5}{180}-\frac{x^3}{6}+\frac{9}{4}x\right]_0^3=\cdots=18\pi-\pi\left(\frac{18}{5}\right)=\frac{72}{5}\pi$$

4)

Cerchiamo il luogo dei centri delle circonferenze tangenti internamente all'arco AB di circonferenza e all'asse x e verifichiamo che coincide con l'arco L di parabola.

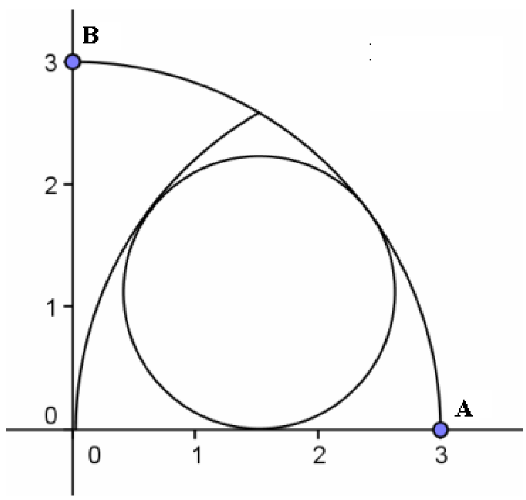


Indichiamo con C il centro della generica circonferenza tangente internamente alla circonferenza data e all'asse delle x ed indichiamo con (x;y) le sue coordinate e con R il suo raggio (x ed y sono compresi tra 0 e 3). Risulta:

R=y e $x^2 + y^2 = OC^2 = (OT - CT)^2 = (3 - y)^2$ (N.B. CT=CH=y)

Quindi: $x^2 + y^2 = (3 - y)^2$ da cui, eseguendo i calcoli, $x^2 = 9 - 6y$, che, con le limitazioni sulla x e sulla y dette sopra, è l'equazione di L.

Cerchiamo ora la circonferenza, di cui L è il luogo dei centri, che risulta tangente anche all'arco di circonferenza di centro A e raggio 3 (vedi figura seguente).



Indicando con C=(x;y) il centro della circonferenza richiesta, con R il suo raggio e con S il punto di tangenza con la circonferenza di centro A e raggio 3, risulta:
AC=AS-R=3-y
Ma, per il teorema di Pitagora applicato al triangolo di vertici A, C e la sua proiezione sull'asse x, risulta anche:

$AC^2 = (3-x)^2 + y^2$, pertanto: $(3-y)^2 = (3-x)^2 + y^2$, da cui, eseguendo i calcoli e tenendo presente che $y = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{3}{2}$, otteniamo x=3/2, e y=9/8. La circonferenza richiesta ha quindi equazione:

$(x-3/2)^2 + (y-9/8)^2 = \left(\frac{9}{8}\right)^2$, che equivale a : $x^2 + y^2 - 3x - \frac{9}{4}y + \frac{9}{4} = 0$

Con la collaborazione di Angela Santamaria