ORDINAMENTO 2013

QUESITO 1

L'area del triangolo può essere calcolata in funzione di due lati e del seno dell'angolo compreso:

$A = \frac{2 \cdot 3 \cdot sen\alpha}{2} = 3$, da cui $sen\alpha = 1$, quindi $\alpha = \frac{\pi}{2}$. I triangolo è quindi rettangolo con cateti 2 e 3. Il terzo lato è l'ipotenusa che misurerà $\sqrt{4+9} = \sqrt{13}$.

QUESITO 2

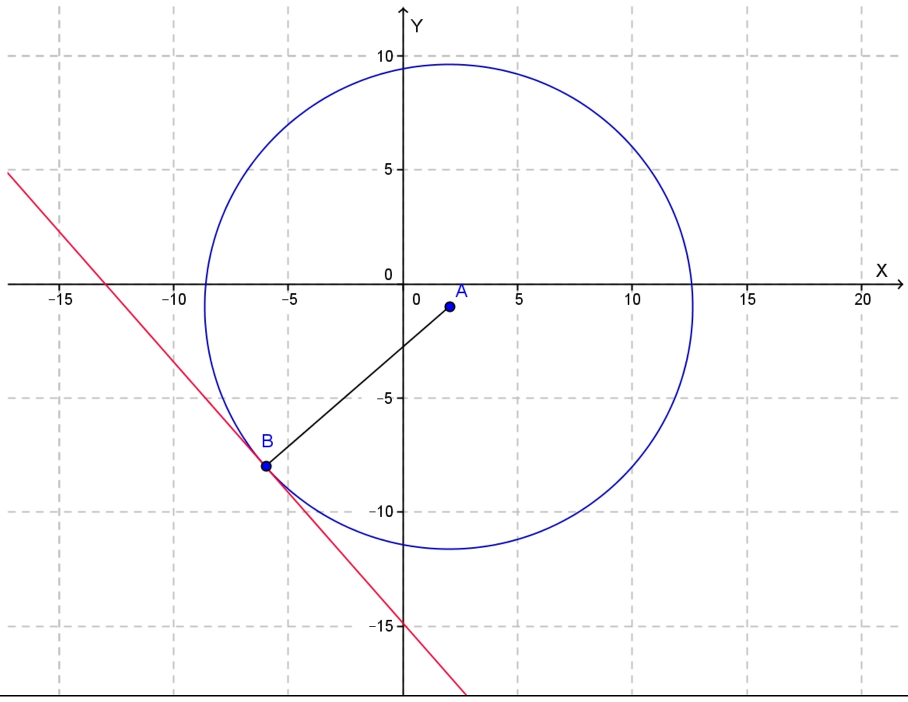
Il dominio della funzione si ottiene risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 3 - x \geq 0 \\ 2 - \sqrt{3-x} \geq 0 \\ 1 - \sqrt{2 - \sqrt{3-x}} \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \leq 3 \\ x \geq -1 \\ x \leq 2 \end{cases}$$

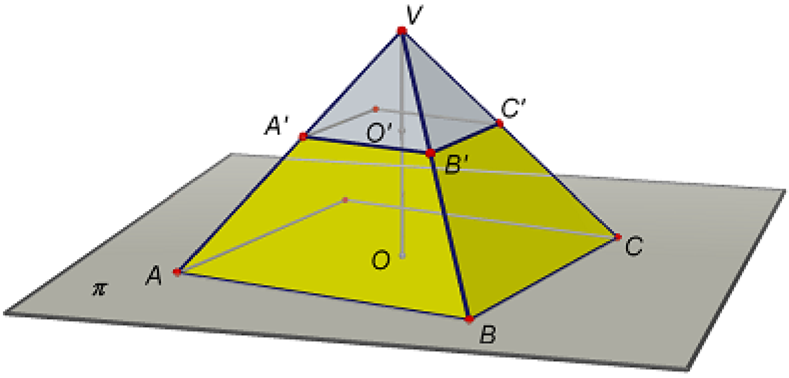
Il dominio è quindi $-1 \leq x \leq 2$

QUESITO 3

A=(2;-1), B=(-6;-8).
La retta richiesta è la perpendicolare alla retta AB in B ed ha equazione **8x+7y+104=0**



QUESITO 4



Per trovare il volume del tronco di piramide si sottrae al volume della piramide VABCD quello della piramide VA'B'C'D'.
Pongo VO' = x, O'O=h (l'altezza del tronco), quindi VO=h+x.

Per similitudine si ha: $\frac{VO'}{VO} = \frac{b}{a}$ (a è il lato della base maggiore) da cui ricavo $x = \frac{bh}{a-b} = VO'$

VH=h+x= $\frac{ah}{a-b}$. Il volume del tronco è dato quindi da:

$$\frac{1}{3}a^2\frac{ah}{a-b} - \frac{1}{3}b^2\frac{bh}{a-b} = \frac{1}{3}h\left(a^2+b^2+ab\right).$$

QUESITO 5

Indicate con a, b, c le dimensioni della valigia, il suo volume è V=abc. Supponiamo di aumentare le dimensioni lineari del k%; il nuovo volume V' sarà (a+ka)(b+kb)(c+kc)= abc$(1+k)^3$
Quindi la variazione percentuale del volume è dato da:

$$\frac{V'-V}{V} = \frac{\mathrm{abc}(1+\mathrm{k})^3 - abc}{abc} = (1+k)^3 - 1.$$

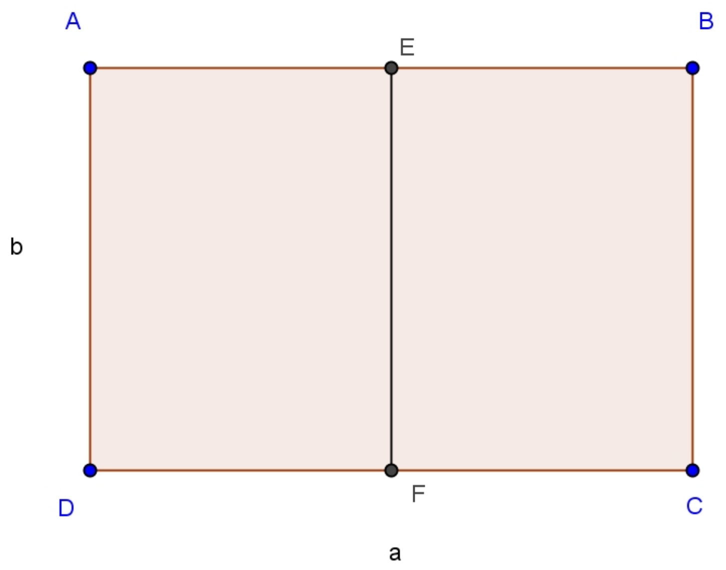
Per esempio con k=0,1 (aumento del 10%) risulta $\frac{V'-V}{V} = (1+0{,}1)^3 - 1 = 0{,}331 \cong 33\%$.

Analogamente, con k=0,2 il volume aumenta del 73% (circa 75%), mentre con k=0,25 il volume aumenta del 95% (circa 100%).

QUESITO 6

I primi 6 numeri si ottengono da 1234567 permutando le ultime 3 cifre (3!=6); il settimo numero in ordine crescente è quello che ha la quart'ultima cifra più piccola possibile, cioè 5: quindi è il numero 1235467.
Siccome 721=720+1=6!+1, i primi 720 numeri si ottengono permutando le ultime sei cifre, il 721° scambiando la sesta cifra con la settima in 1234567: si tratta quindi del numero 2134567.

QUESITO 7



Sia a il lato maggiore.
Se a/2<b risulta AD/DF=a/b, quindi: b/(a/2) = a/b, da cui $a^2 = 2b^2$. Ma risulta ab=1, quindi b=1/a e pertanto $a^4 = 2 \quad \Rightarrow a = \sqrt[4]{2}$; siccome b=1/a risulta: $b = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$.
Se a/2>b risulta AD/DF=b/a, da cui b/(a/2) = b/a e quindi a/2=a che è assurdo.
Non può essere b=a/2 altrimenti il rettangolo sarebbe diviso in due quadrati che non possono essere simili al rettangolo iniziale.

QUESITO 8

$g(x) = \int_0^x f(t)dt$.
L'integrale (quindi la g(x)) cresce da 0 a 2, decresce da 2 a 4.

Per x=2 la g(x) la g ha un massimo (pari all'area del triangolo del primo quadrante, che è 2) e per x=4 ha un minimo (pari alla differenza tra l'area del triangolo del primo quadrante e quella del triangolo del quarto quadrante2-1=1).

QUESITO 9

$$\lim_{x\to 0} 4\frac{senx\cos x - senx}{x^2} = \lim_{x\to 0} 4\frac{senx(\cos x - 1)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\left[-4\frac{senx(1-\cos x)}{x^2}\right] = 0$$

poiché sen(x) tende a zero e $\frac{1-\cos x}{x^2} \to 1/2$

QUESITO 10

Dal grafico della f si deduce che la f ' è positiva per x>2 e per x<-2 (dove la f è crescente). Inoltre la f ha un flesso un x=0 quindi la f' ha un estremo. Il grafico della f' è quindi quello indicato con A.

Con la collaborazione di Angela Santamaria e Stefano Scoleri