ORDINAMENTO 2013 - PROBLEMA 1

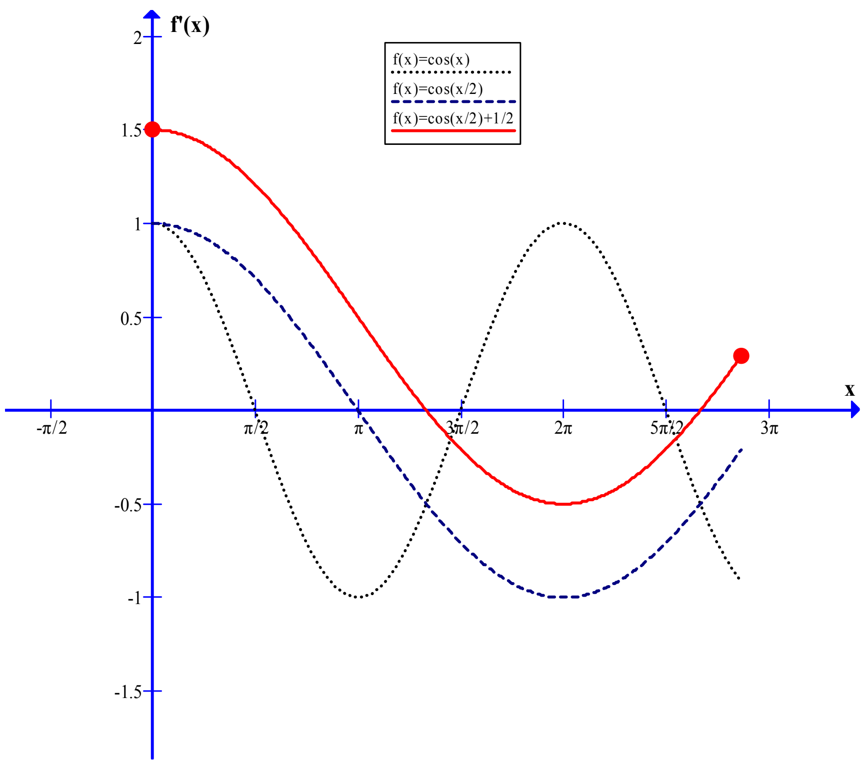
1)

$f(x)=\int_0^x\left[\cos\left(\frac{t}{2}\right)+\frac{1}{2}\right]dt$; con $x\in[0;9]$.

Per il teorema di Torricelli risulta $f'(x)=\cos\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}$, quindi $f'(\pi)=\frac{1}{2}$ ed $f'(2\pi)=-\frac{1}{2}$

2)

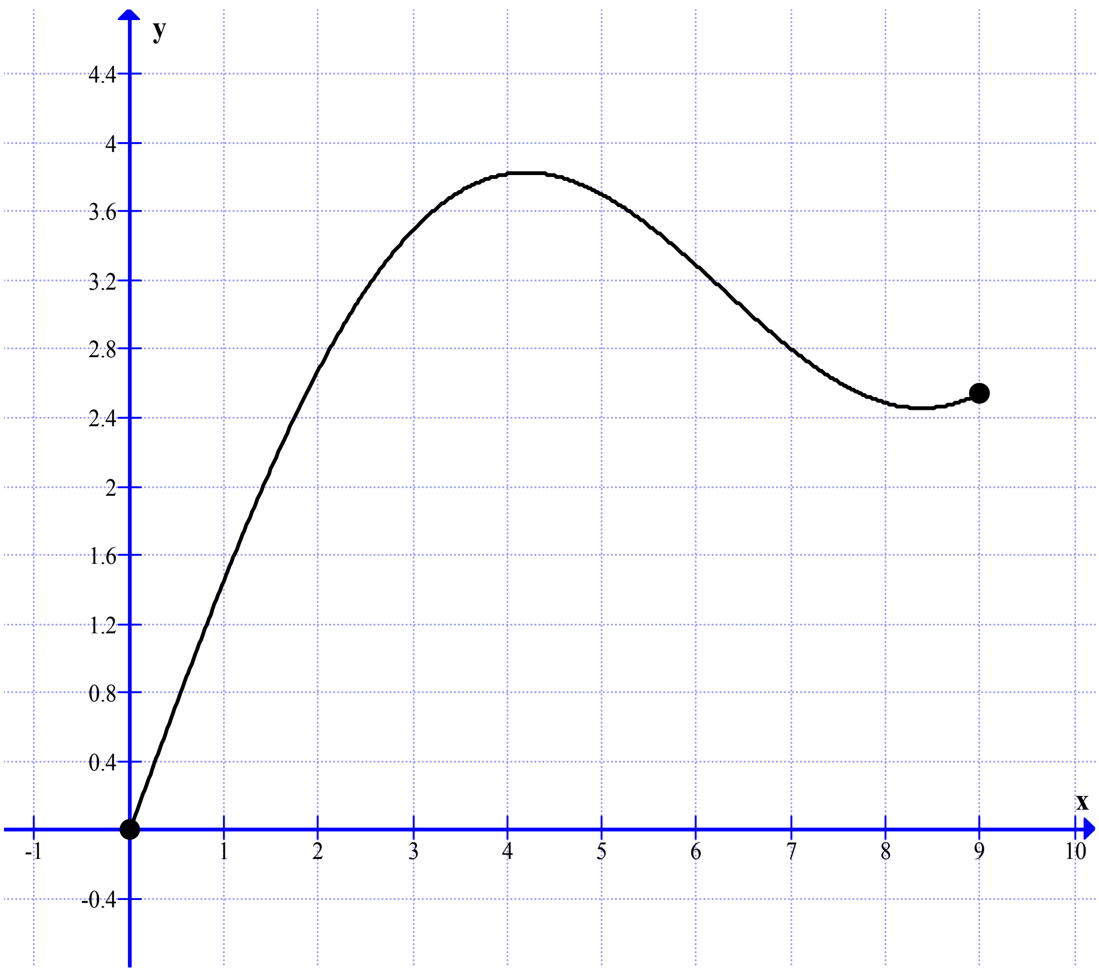
La funzione f '(x) è periodica di periodo $T=\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$ ed il suo grafico si ottiene da quello della funzione di equazione y=cos(x/2) con una traslazione verso l'alto di ½.



f '(x) ha il massimo assoluto in x=0 e vale 3/2, il minimo assoluto in x= 2π e vale – ½, un massimo relativo in x=9 che vale cos(9/2)+1/2 $\cong$ 0.29. Il grafico di f '(x) taglia l'asse x quando cos(x/2)+1/2=0, ossia quando cos(x/2)= - 1/2 , ossia quando $x = \frac{4}{3}\pi$ e $x = \frac{8}{3}\pi$.

f(x) cresce da x=0 a $x = \frac{4}{3}\pi$ e da $x = \frac{8}{3}\pi$ a 9 , dove la f '(x) è positiva, decresce da $x = \frac{4}{3}\pi$ ad $x = \frac{8}{3}\pi$, dove la f '(x) è negativa, quindi ha un massimo in $x = \frac{4}{3}\pi$ ed un minimo in $x = \frac{8}{3}\pi$; in x=9 ha un massimo relativo e presenta un minimo assoluto in x=0, dove vale 0 poiché $f(0) = \int_0^0 \left[\cos\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{1}{2}\right] dt$.

Poiché la derivata seconda f "(x) è positiva dove la f '(x) cresce e negativa dove decresce, deduciamo che la concavità della f(x) è rivolta verso il basso da 0 a 2π e verso l'alto da 2π a 9; quindi in x= 2π c'è un flesso. Valutando le aree delle regioni comprese tra il grafico di f '(x) e l'asse delle x, si può qualitativamente notare che f(9)>0 , che $f(\frac{8}{3}\pi) > 0$ e che f(9)< $f(\frac{4}{3}\pi)$



N.B

$$f\left(\frac{4}{3}\pi\right)=\int_0^{\frac{4}{3}\pi}\left[\cos\left(\frac{t}{2}\right)+\frac{1}{2}\right]dt=\left[2sen(t/2)+\frac{1}{2}t\right]_0^{\frac{4}{3}\pi}=\sqrt{3}+\tfrac{2}{3}\pi\cong 3.8$$

$$f\left(\frac{8}{3}\pi\right)=\int_0^{\frac{8}{3}\pi}\left[\cos\left(\frac{t}{2}\right)+\frac{1}{2}\right]dt=\left[2sen(t/2)+\frac{1}{2}t\right]_0^{\frac{8}{3}\pi}=-\sqrt{3}+\tfrac{4}{3}\pi\cong 2.5$$

$$f(9)=\int_0^{9}\left[\cos\left(\frac{t}{2}\right)+\frac{1}{2}\right]dt=\left[2sen(t/2)+\frac{1}{2}t\right]_0^{9}=2sen(9/2)+9/2\cong 2.6$$

La funzione f(x), calcolando l'integrale, ha equazione $f(x)=2sen(x/2)+\dfrac{1}{2}x$

3)

Il valor medio di f '(x) nell'intervallo $[0;2\pi]$ si ottiene calcolando il seguente integrale:

$$\frac{1}{2\pi-0}\int_0^{2\pi}\left[\cos\left(\frac{t}{2}\right)+\frac{1}{2}\right]dt=\frac{1}{2\pi}\left[2sen(t/2)+\frac{1}{2}t\right]_0^{2\pi}=\frac{1}{2}$$

4)

Il volume richiesto si ottiene calcolando l'integrale seguente:

$$V(W)=\int_0^{4}3sen\left(\frac{\pi}{4}x\right)dx=\left[\frac{12}{\pi}\left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)\right)\right]_0^{4}=\frac{24}{\pi}$$