ORDINAMENTO 2013 - PROBLEMA 2

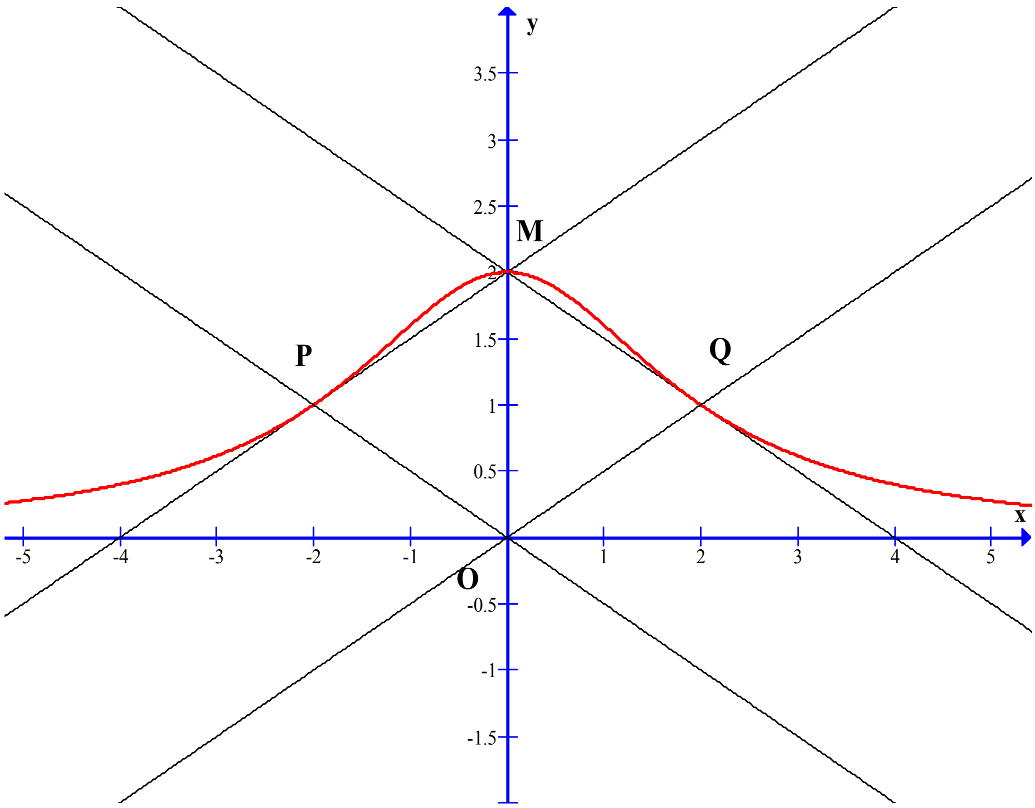
1)

$$f(x)=\frac{8}{4+x^2}$$

La funzione è definita su tutto R, è pari, è sempre positiva, non interseca l'asse x, interseca l'asse y in y=2. I limiti a + infinito e –infinito sono uguali a 0^+ (l'asse x è asintoto).

La derivata prima è $y'=\frac{-16x}{(4+x^2)^2}$ che è positiva per x<0, negativa per x>0 e nulla per x=0 (quindi la funzione cresce fino a 0, ha un massimo, assoluto, in x=0, decresce da 0 in poi).

La derivata seconda è $y''=\frac{-16(4+x^2)(4-3x^2)}{(4+x^2)^4}$, che è positiva quando $4-3x^2<0$, cioè quando $x<-\frac{2}{\sqrt{3}}$ oppure $x>\frac{2}{\sqrt{3}}$; quindi la concavità della curva è rivolta verso l'alto in tali intervalli, verso il basso per $-\frac{2}{\sqrt{3}}<x<\frac{2}{\sqrt{3}}$; in $x=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$ abbiamo dei flessi, di ordinata 3/2.



Cerchiamo ora le tangenti nei punti P=(-2 ; 1) e Q=(2;-1).

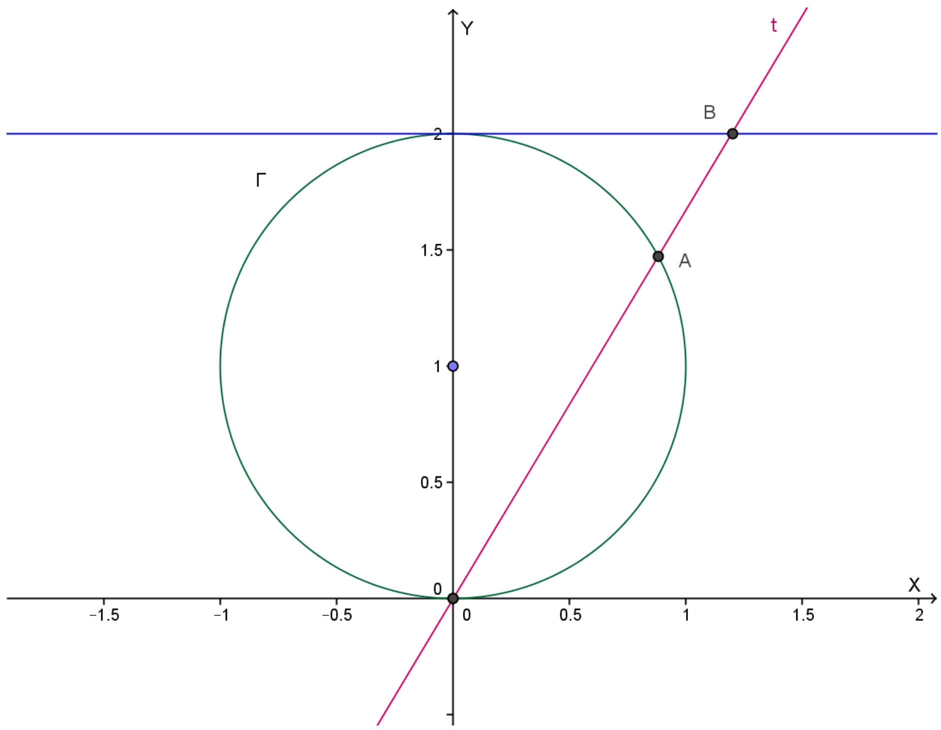
Risulta f '(-2)= 1/2 ed f '(2)=-1/2, quindi le rette tangenti in P e Q sono rispettivamente:
tangente in P: y = (1/2)x+2, tangente in Q: y = -(1/2)x+2.
La distanza OQ, uguale per simmetria alla distanza OP, è uguale a $\sqrt{5}$. Le rette OP e OQ si intersecano sull'asse delle y nel punto M di ordinata 2, quindi le distanze PM e QM sono uguali anch'esse a $\sqrt{5}$: il quadrilatero OQMP è quindi un rombo.

Detto β l'angolo che la retta OQ forma con l'asse delle x, risulta $tg\beta = \frac{1}{2}$. Per l'evidente simmetria della figura risulta che l'angolo POQ è uguale a $180° - 2\beta = 180° - 2arctg(1/2) = 126°52'$.
Quindi gli angoli POQ e PMQ misurano 126°52'.
L'angolo MQO (e MPO) è supplementare di POQ, quindi misura $2\beta = 2arctg(1/2) = 53°08'$

Gli angoli del rombo si possono trovare alternativamente nel seguente modo:

l'angolo α formato dalle rette MP e MQ è ottuso, poiché l'angolo che la retta OQ forma con l'asse x misura meno di 45°; esso è tale che $tg\alpha = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}} = -\frac{4}{3}$ quindi $\alpha = arctg\left(-\frac{4}{3}\right) \cong 126.87 \cong 126°52'$
Quindi gli angoli PMQ e POQ misurano 126°52'.
Gli angoli MPO e MQO, supplementari di α, misureranno 180°-126°52' = 53°08'.

2)



La circonferenza richiesta ha equazione $x^2 + (y-1)^2 = 1 \quad \Rightarrow x^2 + y^2 - 2y = 0$
La retta t ha equazione del tipo y = mx (se la retta è x=0 troviamo il punto (0;2)). Mettendo a sistema

l'equazione della retta t e della circonferenza otteniamo le coordinate di A, che sono
$A=\left(\frac{2m}{1+m^2};\frac{2m^2}{1+m^2}\right)$.

Mettendo a sistema l'equazione di t con la retta di equazione y = 2 otteniamo le coordinate di B:
$B=\left(\frac{2}{m};2\right)$; notiamo che per m = 0 t non taglia la retta di equazione y = 2.

Il luogo richiesto (che ha l'ascissa di B e l'ordinata di A) ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x=\frac{2}{m} \\ y=\frac{2m^2}{1+m^2} \end{cases}$$

Ricavando m dalla prima equazione e sostituendo nella seconda otteniamo l'equazione cartesiana del luogo che è $y=\frac{8}{4+x^2}$, che è l'equazione della funzione f come richiesto.

3)

Per trovare l'area della regione R si calcola il seguente integrale:

$$A(R)=\int_0^2\frac{8}{4+x^2}dx=4\int_0^2\frac{1/2}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}dx=4\left[arctg(x/2)\right]_0^2=4\left(arctg1-arct0\right)=4\left(\frac{\pi}{4}\right)=\pi$$

$$A(\Gamma)=\pi\cdot 1^2=\pi$$

Quindi le due aree sono uguali.

L'area della regione compresa tra Φ e tutto l'asse x si ottiene dall'integrale improprio

$$2\int_0^{+\infty}\frac{8}{4+x^2}dx=2\lim_{k\to+\infty}\int_0^k\frac{8}{4+x^2}dx=2\lim_{k\to+\infty}\left[4arctg(x/2)\right]_0^k=8\lim_{k\to+\infty}\left(arctg(k/2)\right)=8.\frac{\pi}{2}=4\pi$$

che è appunto uguale a quattro volte l'area del cerchio in questione.

4)

Notiamo che con x=2 nella f(x) si ottiene y=1. Dall'equazione di f ricavo

$$x^2=\frac{8}{y}-4$$

Il volume del solido W, ottenuto ruotando la regione R attorno all'asse y, si ottiene sommando il volume del cilindro di raggio 2 e altezza 1 con il volume ottenuto dalla rotazione della regione delimitata dal grafico di f dall'asse y e dalla retta di equazione y=1. L'ultimo volume può essere visto come somma di infiniti volumetti dV di cilindri raggio x e altezza infinitesima dy ($dV = \pi x^2 dy = \pi(\frac{8}{y} - 4)dy$).

Pertanto risulta:

$$V(W) = \pi \int_0^1 2^2\, dy + \pi \int_1^2 \left(\frac{8}{y} - 4 \right) dy$$

Il calcolo effettivo del volume è:

$$V(W) = \pi \int_0^1 2^2\, dy + \pi \int_1^2 \left(\frac{8}{y} - 4 \right) dy = \pi(4) + \pi\left[8 \ln y - 4y\right]_1^2 = 4\pi + \pi(8 \ln 2 - 8 + 4) = 8\pi \ln 2 \cong 17.42$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria e Stefano Scoleri