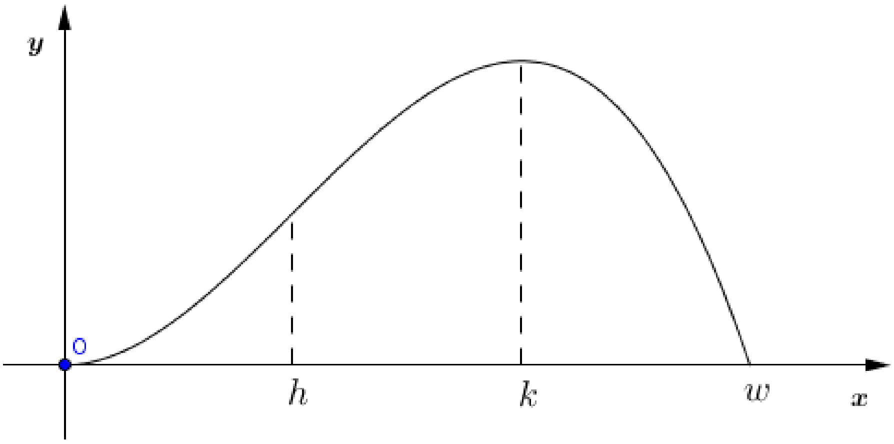
ORDINAMENTO 2014 - PROBLEMA 1



Il grafico indicato è quello della funzione integrale

$$g(x) = \int_0^x f(t)dt$$

con f definita nell'intervallo [0; w] e ivi continua e derivabile. Inoltre la curva ha tangente orizzontale in O, presenta un flesso per x = h ed massimo per x = k.

1)

Si determinino f(0) ed f(k); si dica se il grafico della funzione f presenta punti di massimo o di minimo e se ne tracci il possibile andamento.

Per il teorema di Torricelli risulta $g'(x) = f(x)$, quindi:
$f(0) = g'(0) = 0$ (perché in O abbiamo tangente orizzontale).
Analogamente:
$f(k) = g'(k) = 0$ (perché per x=k si ha un massimo e la funzione è derivabile).

Eventuali massimi e minimi di f(x).

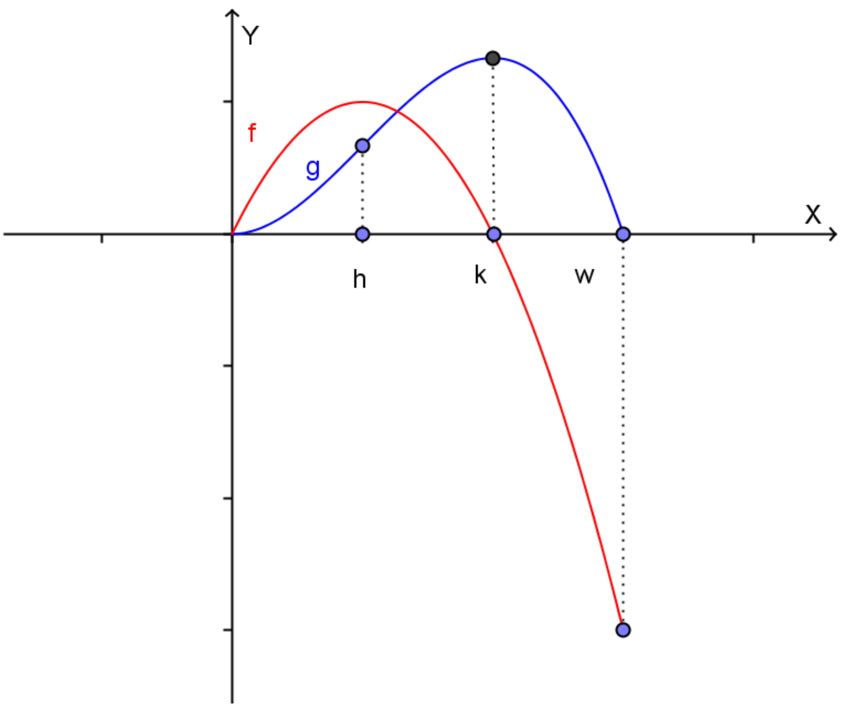
f(x) cresce dove f'(x)>0, ma f'(x)=g''(x)>0 per 0<x<h

f(x) decresce dove f'(x)<0, ma f'(x)=g''(x)<0 per h<x<w

Pertanto:
f ha un massimo relativo (che è anche assoluto) per x=h con f(h)>0;

f>0 dove g'> 0, quindi per 0<x<k;
f<0 dove g'<0, quindi per k<x<w;
f= 0 per x=0 e x=k.
f'(w)<0 come si vede da g'(w), che indica il coefficiente angolare della tangente al grafico di g in x=w

Possibile grafico di f(x):



2)

Si supponga, anche nei punti successivi 3 e 4, che g(x) sia, sull'intervallo considerato, esprimibile come funzione polinomiale di terzo grado. Si provi che, in tal caso, i numeri h e k dividono l'intervallo in tre parti uguali.

$$\boldsymbol{g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d}$$

Dobbiamo dimostrare che:

$$\boldsymbol{h = \frac{w}{3} \quad e \quad k = \frac{2}{3}w}$$

Risulta:

g(0)=0, quindi d=0
$g'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$; g'(0)=0 quindi c=0.

Pertanto g(x) è del tipo:

$$\boldsymbol{g(x) = ax^3 + bx^2; \quad g'(x) = 3ax^2 + 2bx\,; \qquad g''(x) = 6ax + 2b}$$

Dalle informazioni date sulla g, risulta:

$$\begin{cases} g(w)=0 \\ g'(k)=0 \\ g''(h)=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} aw^3+bw^2=0 \\ 3ak^2+2bk=0 \\ 6ah+2b=0 \end{cases} \Longrightarrow (w\ e\ k\ sono\ \neq 0) \begin{cases} aw+b=0 \\ 3ak+2b=0 \\ 3ah+b=0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si ottiene: $\begin{cases} aw+b=0 \Longrightarrow w=-\frac{b}{a} \\ 3ak+2b=0 \Longrightarrow k=-\frac{2}{3}\frac{b}{a} \\ 3ah+b=0 \Longrightarrow h=-\frac{1}{3}\frac{b}{a} \end{cases}$

Quindi $h=\frac{w}{3}$ e $k=\frac{2}{3}w.$

3)

Si determini l'espressione di g(x) quando w=3 e $g(1)=\frac{2}{3}$ e si scrivano le equazioni delle normali a Γ nei punti in cui esso è tagliato dalla retta $y=\frac{2}{3}$.

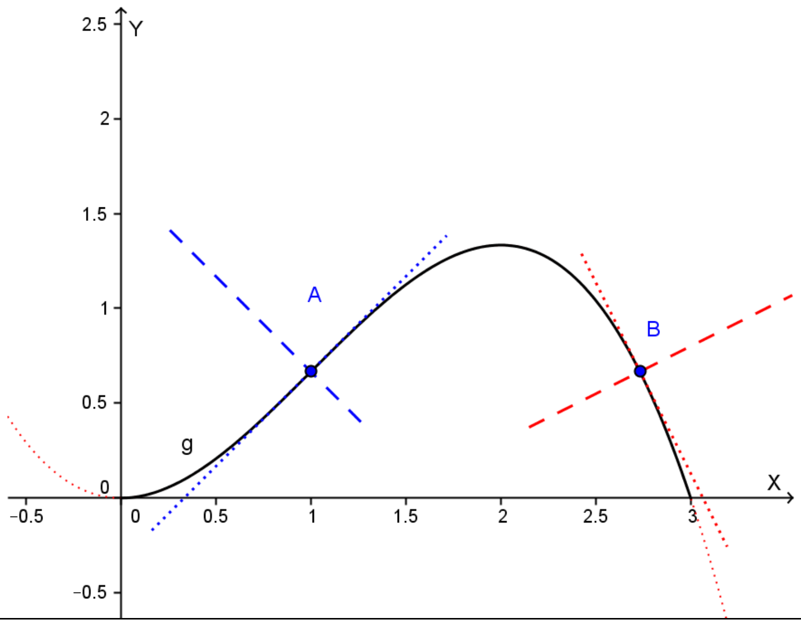
$\boldsymbol{g(x)=ax^3+bx^2}$

Siccome $g(1)=\frac{2}{3}$ risulta $a+b=\frac{2}{3}$

Inoltre è $w=-\frac{b}{a}=3, da\ cui\ b=-3a$

Risolvendo il sistema $\begin{cases} a+b=\frac{2}{3} \\ b=-3a \end{cases}$ otteniamo $a=-\frac{1}{3}$ e $b=1$

Pertanto: $\boldsymbol{g(x)=-\frac{1}{3}x^3+x^2}$



Cerchiamo le intersezioni con $y=\frac{2}{3}$: $\boldsymbol{-\frac{1}{3}x^3+x^2=\frac{2}{3}}$ $da\ cui$ $\boldsymbol{x^3-3x^2+2=0}$
Questa equazione ammette come radice x=1 e, abbassandola di grado con la regola di Ruffini, si ottiene: $(x-1)(x^2-2x-2)=0$
$x^2-2x-2=0$ se $x=1-\sqrt{3}<0, non\ accettabile$ e $x=1+\sqrt{3}$, accettabile.

Abbiamo quindi i punti $\boldsymbol{A=\left(1;\frac{2}{3}\right)}$ **e** $\boldsymbol{B=\left(1+\sqrt{3};\frac{2}{3}\right)}$.

$\boldsymbol{g'(x)=-x^2+2x}$

Coefficiente angolare della tangente in A: g'(1)=1, m(normale in A) = -1
Coefficiente angolare della tangente in B: g'($1+\sqrt{3}$)= - 2, m(normale in B) = 1/2
Equazione normale in A: $y=-x+\frac{5}{3}$
Equazione normale in B: $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}$

4)

Il volume richiesto si può calcolare con il **"metodo dei gusci cilindrici"** mediante l'integrale:

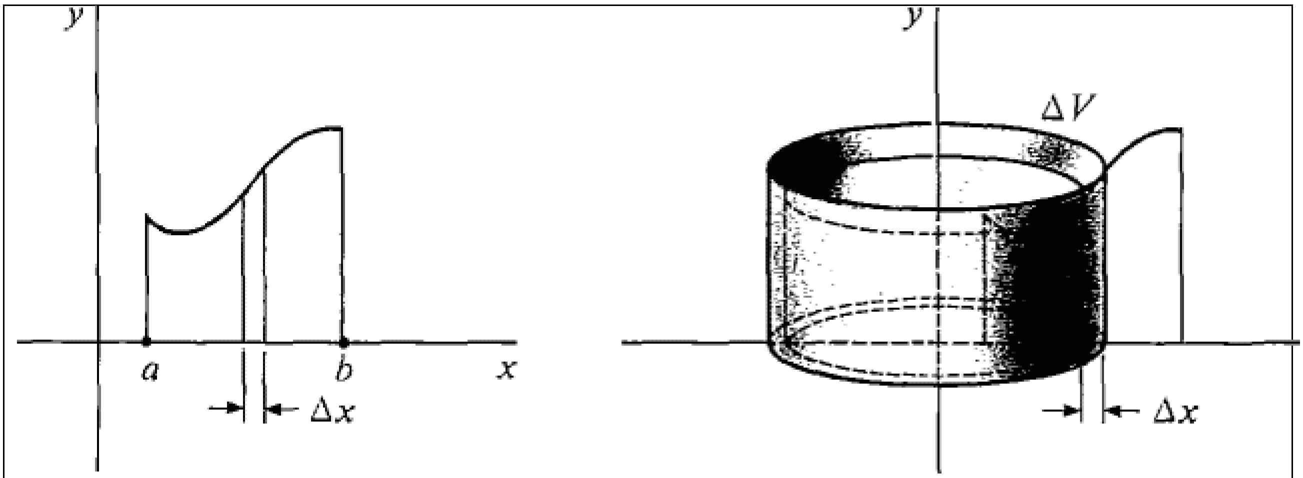
$$\boldsymbol{V(W)=\int_0^3 (2\pi x)g(x)dx}$$

$$\int_0^3 (2\pi x)g(x)dx=\int_0^3 (2\pi x)\left(-\frac{1}{3}x^3+x^2\right)dx=2\pi\int_0^3\left(-\frac{1}{3}x^4+x^3\right)dx$$

$$=2\pi\left[-\frac{1}{12}x^5+\frac{1}{4}x^4\right]_0^3=2\pi\cdot\frac{81}{20}=\frac{81\pi}{10}\ dm^3\cong 25.45\ dm^3=25{,}45\ l$$

IL METODO DEI GUSCI CILINDRICI

Il solido generato dalla rotazione attorno all'asse y di una regione piana può essere visto come somma di tanti "gusci cilindrici", cioè cilindri cavi di raggio interno x, raggio esterno $x+\Delta x$ e altezza f(x),



Consideriamo il volume finito ΔV di un “guscio” come volume infinitesimo dV, quindi trattiamo Δx come infinitesimo dx ; esso può essere espresso nella forma:

$$dV = \pi(x+dx)^2 f(x) - \pi x^2 f(x) = \pi x^2 f(x) + 2\pi x dx f(x) + \pi(dx)^2 f(x) - \pi x^2 f(x) =$$
$$= 2\pi\, x\, dx\, f(x) + \pi(dx)^2 f(x) \cong 2\pi\ x\ f(x)\ dx$$

(N.B. il termine $\pi(dx)^2 f(x)$ è trascurabile, poiché $(dx)^2$ è infinitesimo di ordine superiore rispetto a dx).

Quindi $dV = 2\pi\ x\ f(x)\ dx$

La somma degli infiniti gusci di volume dV, estesa all’intervallo delle ascisse [a;b] in cui è definita la regione che ruota, cioè il volume del nostro solido, può essere quindi calcolato mediante il seguente integrale:

$$V = 2\pi \int_a^b x\, f(x) dx$$

Per un ulteriore approfondimento sul **Metodo dei gusci cilindrici** si veda la seguente pagina di Matefilia:

http://www.matefilia.it/argomen/gusci-cilindrici/metodo-gusci-cilindrici.pdf

Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri