ORDINAMENTO 2014 - PROBLEMA 2

1)

$\boldsymbol{f(x)=x\sqrt{4-x^2}}$

Anche se non richiesto esplicitamente, facciamo lo studio completo della funzione.

Dominio: $4-x^2\geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{-2\leq x\leq 2}$
Simmetrie notevoli: f(-x)=-f(x), quindi la funzione è dispari (grafico simmetrico rispetto all'origine).
Intersezioni con gli assi cartesiani:
x=0, y=0
y=0, x=0, x=2, x=-2
Segno della funzione: $f(x)\geq 0 \ se\ x\geq 0$ (nel dominio)
Limiti: la funzione è continua in un intervallo chiuso e limitato.
Derivata prima:

$$\frac{d}{dx}\left(x\sqrt{4-x^2}\right)=-\frac{2\left(x^2-2\right)}{\sqrt{4-x^2}}$$

La funzione non è derivabile in x= -2 ed in x=2.
Il limite per x che tende a (-2)+ oppure a 2- della derivata è – infinito, quindi avremo tangenti verticali in x= -2 ed in x= 2

$\boldsymbol{f'(x)\geq 0} \quad se \quad x^2-2\leq 0 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{-\sqrt{2}\leq x\leq \sqrt{2}}$

Quindi la funzione è crescente in tale intervallo e decrescente negli intervalli

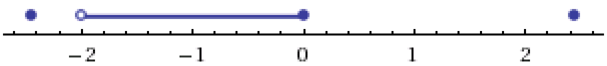
$-2\leq x<-\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}<x\leq 2$

Avremo quindi un **minimo** (assoluto) in $m=\left(\boldsymbol{-\sqrt{2}\,;-2}\right)$ ed un **massimo** (assoluto) nel punto M=$\left(\boldsymbol{\sqrt{2}\,;2}\right)$

Derivata seconda:

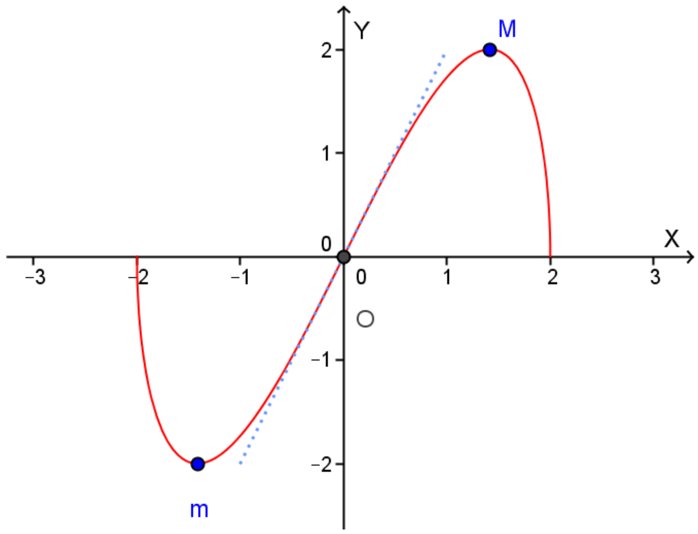
$$\frac{d^2}{dx^2}\left(x\sqrt{4-x^2}\right)=\frac{2\,x\left(x^2-6\right)}{\left(4-x^2\right)^{3/2}}$$

$f''(x)\geq 0 \quad se \quad 2x(x^2-6)\geq 0 \quad \Longrightarrow \quad x=\pm\sqrt{6} \ (fuori\ dominio), \qquad -2<x\leq 0$



Quindi il grafico ha la concavità verso l'alto nell'intervallo $-2 < x \leq 0$, verso il basso nella parte rimanente del dominio. **Flesso nel punto (0;0) con tangente inflessionale di coefficiente angolare f'(0)=2**

Il grafico della funzione è pertanto il seguente:



2)

Come detto nel punto 1) **la funzione è dispari**, quindi il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine.

$$\boldsymbol{f(x) = x\sqrt{4-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}\left(x\sqrt{4-x^2}\right) = -\frac{2\left(x^2-2\right)}{\sqrt{4-x^2}}$$

f'(0)=2, quindi, detto α l'angolo formato dalla tangente nell'origine con il semiasse positivo delle x, risulta:

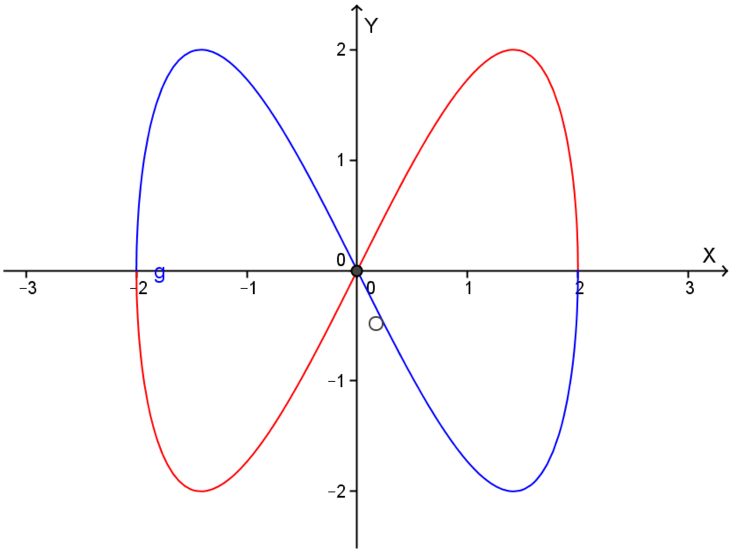
$$tg\,\alpha = 2, \quad da\ cui \quad \alpha = arctg(2) \cong 63°26'$$

3)

Consideriamo la curva di equazione $\boldsymbol{y^2 = x^2(4-x^2)}$
Posto $4 - x^2 \geq 0$, cioè $-2 \leq x \leq 2$, otteniamo:

$$y = \pm|x|\sqrt{4-x^2} = \begin{cases} \pm x\sqrt{4-x^2} & se \quad 0 \leq x \leq 2 \\ \mp x\sqrt{4-x^2} & se \quad -2 \leq x < 0 \end{cases}$$

Il grafico è quindi quello della f(x) unito al grafico di $-$ f(x)



L'area richiesta è data da:

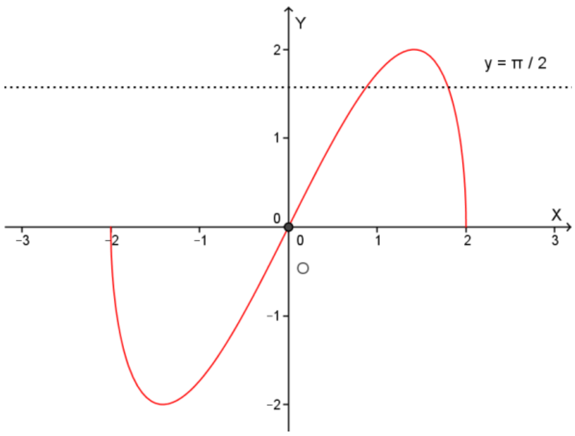
$$Area = 4 \cdot \int_0^2 f(x)dx = 4 \cdot \int_0^2 x\sqrt{4-x^2}dx = -2 \cdot \int_0^2 -2x\sqrt{4-x^2}dx = -2 \cdot \left[\frac{2}{3}(4-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2 =$$
$$= -\frac{4}{3}(0-8) = \frac{32}{3}$$

4)

$h(x) = sen\left(x\sqrt{4-x^2}\right)$ con $0 \le x \le 2$

I punti del grafico di h(x) di ordinata 1 sono quelli per cui: $sen\left(x\sqrt{4-x^2}\right) = 1$, cioè:

$x\sqrt{4-x^2} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$: osservando il grafico di f(x) con la limitazione imposta alla x può essere solo k=0 e si hanno DUE PUNTI DI INTERSEZIONE tra y=f(x) ed y= $\frac{\pi}{2}$, quindi i punti del grafico di h(x) di ordinata sono 2: $0 < x_1 < \sqrt{2}$ e $\sqrt{2} < x_2 < 2$



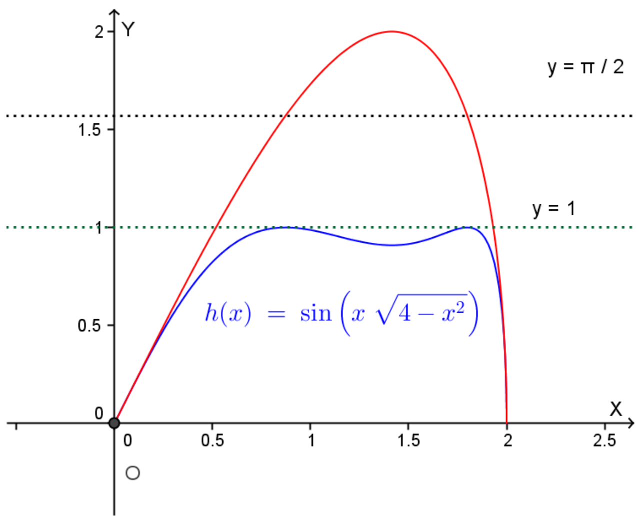
Per $0 \leq x \leq 2$ la f(x) cresce da 0 a 2, e siccome 2 > $\frac{\pi}{2}$ sen (f(x)) ha il massimo assoluto 1 quando

$x\sqrt{4-x^2} = \frac{\pi}{2}$, cioè per $x = x_1$.

La f(x) decresce dal valore 2 al valore 0, passando per $x = x_2$ dove h(x)=1.

Quando f(x) passa da $\frac{\pi}{2}$ a 2 h(x) decresce da 1 a sen(2); quando f(x) decresce da 2 a $\frac{\pi}{2}$, h(x) cresce da sen(2) a 1: **quindi sen(2) è minimo relativo (per x=$\sqrt{2}$).**
Infine quando f(x) passa dal valore $\frac{\pi}{2}$ al valore 0, h(x) decresce da 1 a zero**: il minimo assoluto di h(x) è quindi 0, assunto per x=0 e x=2.**

Forniamo il grafico di $h(x) = sen(x\sqrt{4-x^2})$ con $0 \leq x \leq 2$



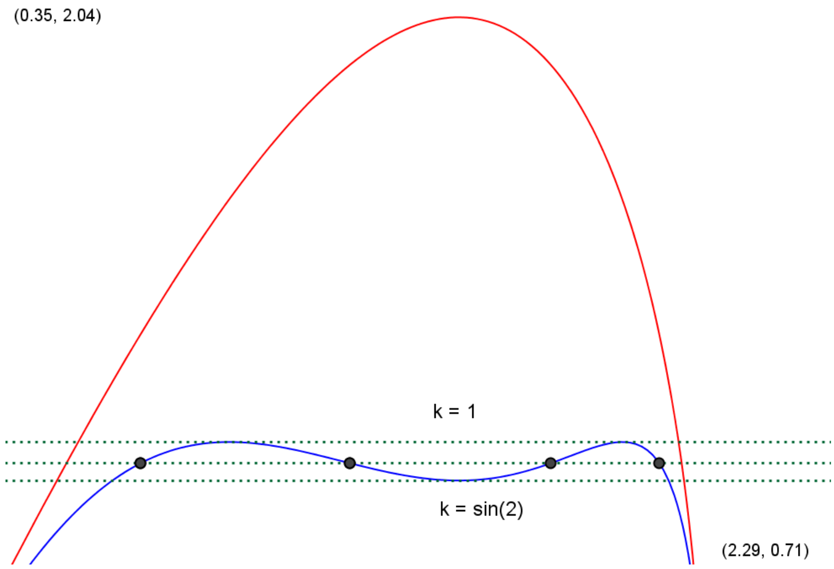
Dobbiamo ora trovare per quali valori di k l'equazione h(x)=k ha 4 soluzioni distinte.

Come detto nello studio precedente sulla variazione di h(x), essa cresce da 0 ad x_1 $(dal\ valore\ 0\ al\ valore\ 1)$decresce da x_1 a 2 (dal valore 1 al valore sen(2)), cresce di nuovo da 2 a x_2 (dal valore sen(2) al valore 1) e decresce infine da x_2 a 2 (dal valore 1 al valore 0):

ne segue che il grafico di h(x) taglia la retta y=k in **4 punti distinti quando:**

$\boldsymbol{sen(2) < k < 1}$

come è messo meglio in evidenza nel grafico seguente:



Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri