LICEO SCIENTIFICO 2015 - PROBLEMA 1

Il piano tariffario proposto da un operatore telefonico prevede, per le telefonate all'estero, un canone fisso di 10 euro al mese, più 10 centesimi per ogni minuto di conversazione. Indicando con x i minuti di conversazione effettuati in un mese, con f(x) la spesa totale nel mese e con g(x) il costo medio al minuto:

1)

individua l'espressione analitica delle funzioni f(x) e g(x) e rappresentale graficamente; verifica che la funzione g(x) non ha massimi né minimi relativi e dai la tua interpretazione dell'andamento delle due funzioni alla luce della situazione concreta che esse rappresentano

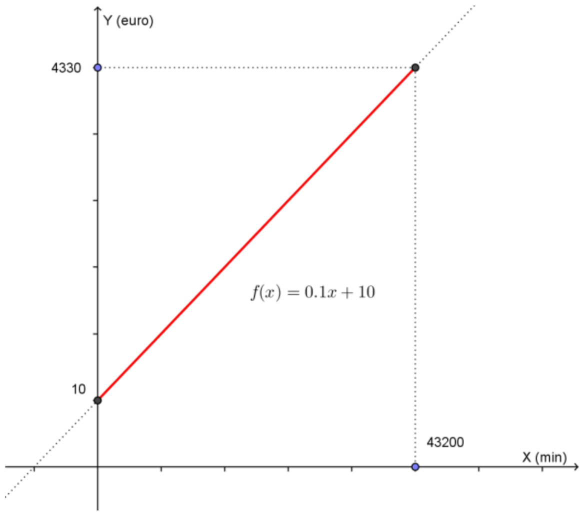
$10\ euro$: $canone\ fisso\ mensile$
$10\ centesimi$: $costo\ di\ un\ minuto\ di\ conversazione$
$x = minuti\ di\ conversazione\ in\ un\ mese\ \ (0 \le x \le 43200)$
$f(x) = spesa\ totale\ nel\ mese\ (in\ euro)$
$g(x) = costo\ medio\ al\ minuto.$

Ricordiamo che il numero di minuti di un mese, supponendolo di 30 giorni è:

$30\ giorni = 30 \cdot 24 \cdot 60\ minuti = 43200\ minuti.$

Ipotizziamo che x sia un numero reale e che il costo sia addebitato con continuità al variare di x (tale ipotesi, necessaria viste le richieste del problema, appare in realtà poco realistica !). Risulta:

$f(x) = 0.1x + 10 = \frac{1}{10}x + 10\ ,\quad con\ \ 0 \le x \le 43200\ ,\ x\ in\ minuti,\ f(x)\ \ in\ \ euro$



Interpretiamo l'andamento di f:

se in un mese effettuo zero minuti di conversazione il costo totale è dato dal solo canone mensile: $10\ euro$ (spesa minima mensile).

Nel caso estremo in cui la conversazione è continua (cioè tutti i minuti del mese), il costo totale è datato da:

$0.1 \cdot 43200 + 10 \quad euro = \quad 4330\ euro$ (spesa mensile massima).

Determiniamo ora la funzione g(x).

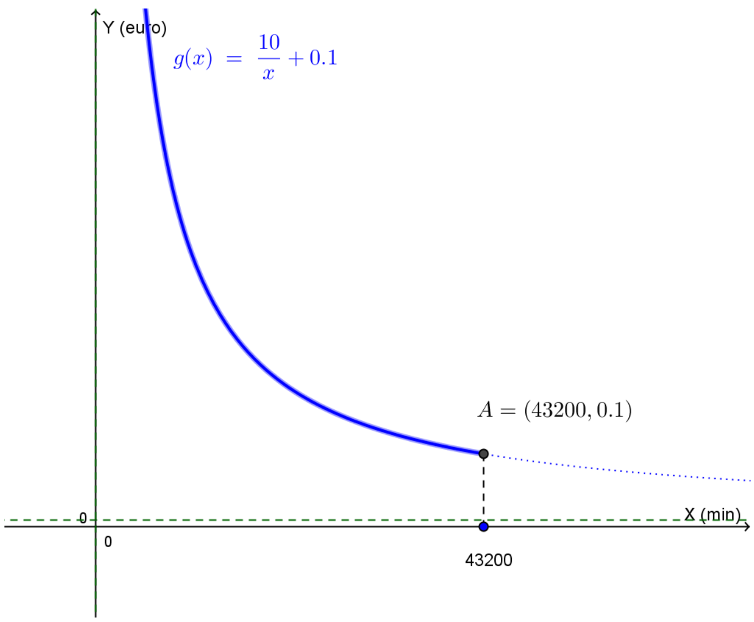
Osserviamo che se i minuti di conversazione sono x, il costo medio del canone è:
$costo\ medio\ del\ canone = \frac{10\ euro}{x\ minuti} = \frac{10}{x} \quad euro/min \quad (con\ x \neq 0)$
Quindi, tenuto conto che il costo medio per minuto di conversazione è di 10 centesimi:

$$g(x) = \frac{10}{x} + 0.1 \quad con \quad 0 < x \leq 43200$$

Il grafico della g(x) è una parte del ramo positivo dell'iperbole equilatera di equazione $y = \frac{10}{x} + 0.1$, che ha per asintoti l'asse y e la retta di equazione y=0.1.

Notiamo che per x che tende a + infinito la funzione g(x) tende a 0.1, che è molto prossimo al valore che assume per x= 43200, cioè al costo medio in un mese; infatti, se x=43200, si ottiene:

$$\left(\frac{10}{43200} + 0.1\right) \frac{euro}{minuto} \cong 0.10023 \frac{euro}{minuto} \cong 0.1 \frac{euro}{minuto}.$$



L'andamento della g(x) ci dice che il costo medio al minuto va diminuendo all'aumentare dei minuti di conversazione e raggiunge il valore minimo quando la conversazione dura tutto il mese; quindi la funzione non ammette punti di massimo e minimo relativi se consideriamo tali i punti interni all'insieme di definizione. Se consideriamo la funzione nel dominio $0 < x \leq 43200$ la funzione non ammette massimo assoluto ma ammette minimo assoluto (come già notato in x=43200). Notiamo che per alcuni i punti di massimo e minimo relativi possono essere assunti anche negli estremi del dominio, quindi, in tal caso, la funzione non ammette massimi relativi ma ammette minimo relativo per x=43200.

2)

Detto x_0 il numero di minuti di conversazione già effettuati nel mese corrente, determina x_1 tale che: $g(x_1) = \frac{g(x_0)}{2}$. Traccia il grafico della funzione che esprime x_1 in funzione di x_0 e discuti il suo andamento. Che significato ha il suo asintoto verticale?

$g(x_1) = \frac{10}{x_1} + 0.1 = \frac{1}{2} g(x_0) = \frac{1}{2}\left(\frac{10}{x_0} + 0.1\right)$ quindi:

$$\frac{10}{x_1} + 0.1 = \frac{5}{x_0} + 0.05 \quad , \quad \frac{10}{x_1} = \frac{5}{x_0} - 0.05 = \frac{5 - 0.05x_0}{x_0} \quad , \quad x_1 = \frac{10 \cdot x_0}{5 - 0.05 \cdot x_0} = \frac{200x_0}{100 - x_0}$$

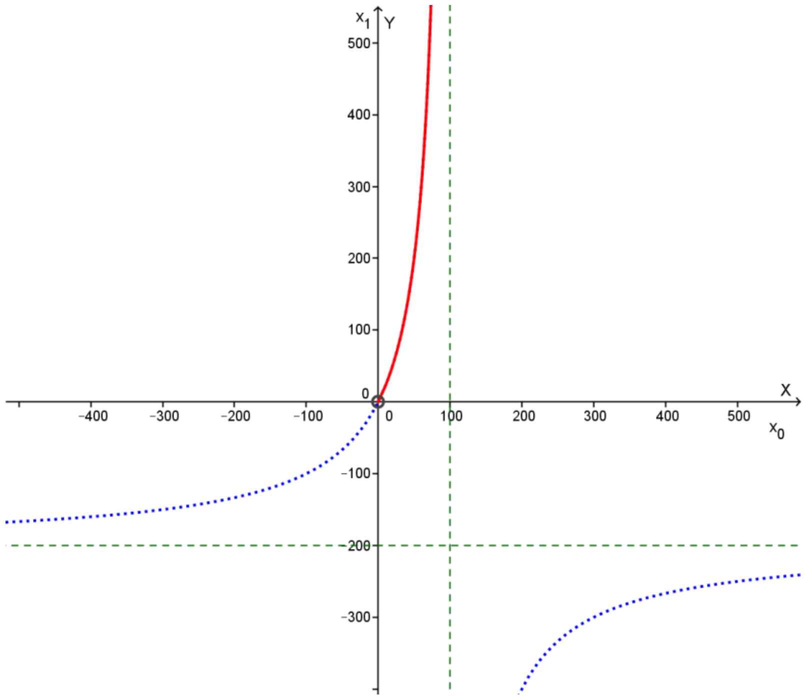
Posto per comodità di scrittura $y = x_1$ e $x = x_0$, risulta:

$$y = \frac{200x}{-x + 100}$$

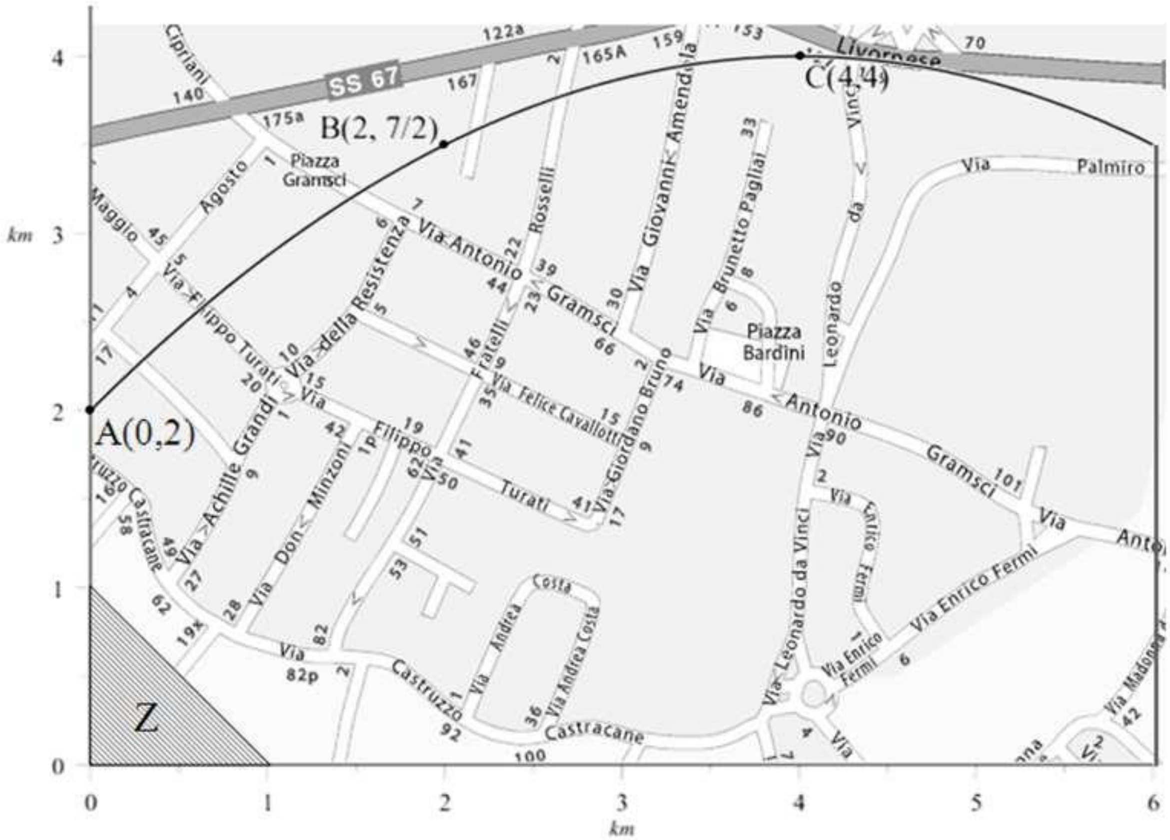
Si tratta di una funzione omografica (iperbole equilatera con gli asintoti paralleli agli assi cartesiani) che ha centro in $(100; -200)$ e passa per l'origine degli assi cartesiani. L'asintoto verticale ha equazione x=100 e rappresenta il caso in cui sono stati effettuati 100 minuti di conversazione.

Osserviamo che se x è superiore a 100 minuti x_1 è negativo; ciò vuol dire che per $x > 100\ minuti$ il costo medio, $g(x_1)$, non può più essere dimezzato. Notiamo esplicitamente che se x=100 si ha $g(100) = \frac{10}{100} + 0.1 = 0.2$, che è il doppio del valore asintotico. Siccome il valore asintotico non è mai raggiunto, il costo medio corrispondente a 100 minuti non può essere dimezzato.

Grafico della funzione (in rosso, tratto continuo, la parte che tiene conto delle limitazione del problema):



Sul suo sito web l’operatore telefonico ha pubblicato una mappa che rappresenta la copertura del segnale telefonico nella zona di tuo interesse:



La zona è delimitata dalla curva passante per i punti A, B e C, dagli assi x e y, e dalla retta di equazione x = 6; la porzione etichettata con la "Z", rappresenta un'area non coperta dal segnale telefonico dell'operatore in questione.

3)

Rappresenta il margine superiore della zona con una funzione polinomiale di secondo grado, verificando che il suo grafico passi per i tre punti A, B e C. Sul sito web dell'operatore compare la seguente affermazione: "nella zona rappresentata nella mappa risulta coperto dal segnale il 96% del territorio"; verifica se effettivamente è così.

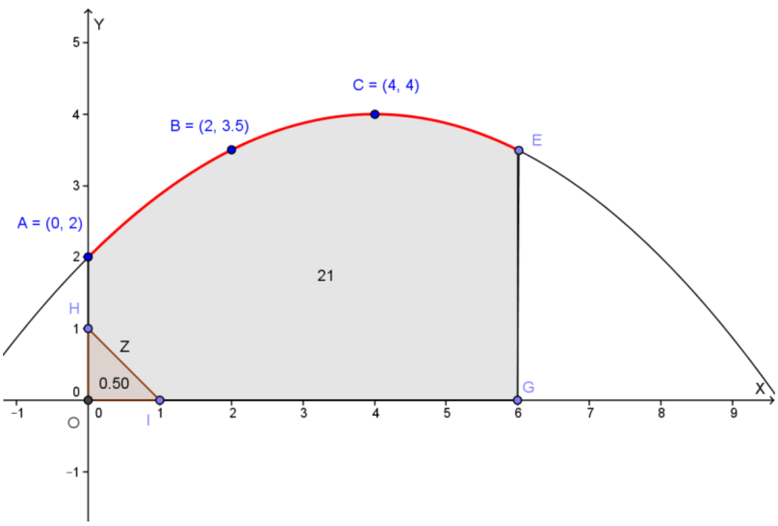
Consideriamo la generica funzione polinomiale di secondo grado: $y = ax^2 + bx + c$
e imponiamo che passi per i punti di coordinate: $A = (0;2)$, $B = \left(2;\frac{7}{2}\right)$ e $C = (4;4)$.

$$\begin{cases} 2 = c \\ \frac{7}{2} = 4a + 2b + c \\ 4 = 16a + 4b + c \end{cases} ; \quad \begin{cases} c = 2 \\ \frac{7}{2} = 4a + 2b + 2 \\ 4 = 16a + 4b + 2 \end{cases} ; \quad \begin{cases} c = 2 \\ 4a + 2b = \frac{3}{2} \\ 8a + 2b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 2 \\ 4a = -\frac{1}{2} \\ 8a + 2b = 1 \end{cases}$$

Da cui: $a = -\frac{1}{8}$, $b = 1$, $c = 2$. Quindi:

$y = -\frac{1}{8}x^2 + x + 2$, con $0 \le x \le 6$

Il grafico della funzione (in cui sono evidenziate la zone coperte dal segnale, in grigio, e quella non coperta, Z), è il seguente:



L'area della zona totale è data da:

$$\int_0^6 \left(-\frac{1}{8}x^2 + x + 2\right) dx = \left[-\frac{1}{24}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_0^6 = \cdots = 21 \quad km^2$$

$Area\ zona\ Z = 0.50\ km^2$

Percentuale area coperta dal segnale= $\frac{21-0.50}{21} \cong 0.976 \cong 98\%$
L'affermazione quindi non è corretta (anche se la stima è a favore dell'utente).

L'operatore di telefonia modifica il piano tariffario, inserendo un sovrapprezzo di 10 centesimi per ogni minuto di conversazione successivo ai primi 500 minuti.

4)

Determina come cambiano, di conseguenza, le caratteristiche delle funzioni f(x) e g(x), riguardo agli asintoti, alla monotonia, continuità e derivabilità, individua eventuali massimi e minimi assoluti della funzione g(x) e della sua derivata e spiegane il significato nella situazione concreta.

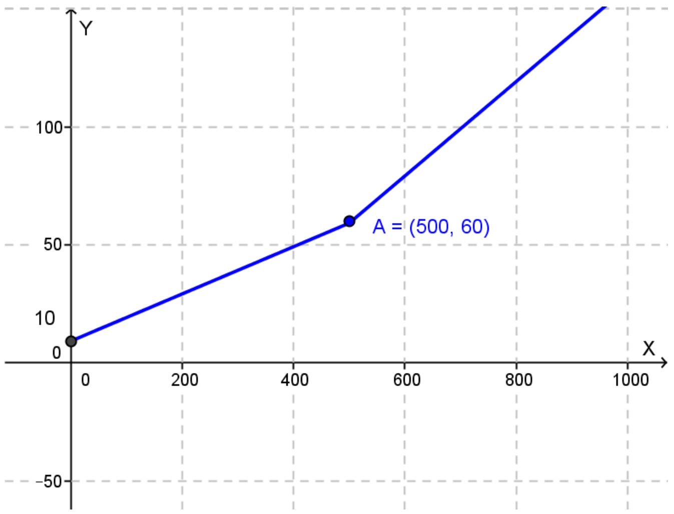
Le nuove funzioni f e g hanno le seguenti equazioni.
Per quanto riguarda la funzione f(x), notiamo che il sovrapprezzo è dato da:

$0.1 \cdot (x - 500)$, per x>500; per x>500 la funzione f ha quindi la seguente equazione:

$(0.1 \cdot x + 10) + 0.1 \cdot (x - 500) = 0.2 \cdot x - 40$. Pertanto:

$$f(x) = \begin{cases} 0.1 \cdot x + 10\,, & se\quad 0 \leq x \leq 500 \\ 0.2 \cdot x - 40\,, & se\ \ x > 500 \end{cases}$$

Il grafico della nuova funzione f(x) è il seguente:



La nuova f è continua in tutto il suo dominio, è sempre crescente ma non è derivabile per x=500, dove c'è un punto angoloso; non ci sono asintoti.

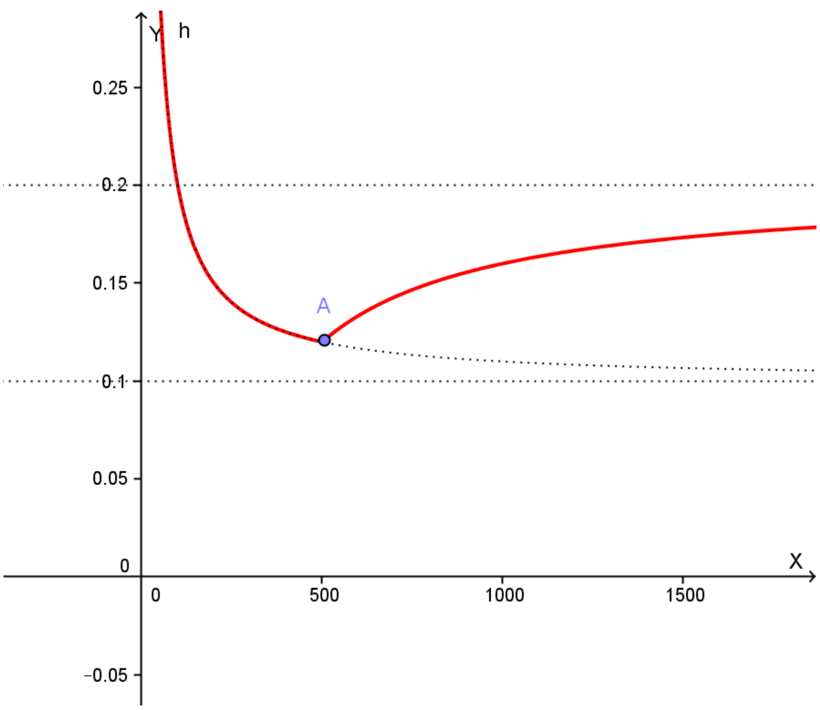
Notiamo che la funzione g si ottiene dalla funzione f nel modo seguente:

$$g(x) = \frac{f(x)}{x}$$

Quindi la nuova funzione g(x) ha la seguente equazione:

$$g(x) = \frac{f(x)}{x} = \begin{cases} \dfrac{0.1 \cdot x + 10}{x} = \dfrac{10}{x} + 0.1\,, & se \quad 0 < x \leq 500 \\ \dfrac{0.2 \cdot x - 40}{x} = -\dfrac{40}{x} + 0.2\,, & se \quad x > 500 \end{cases}$$

Il grafico della nuova g è il seguente:

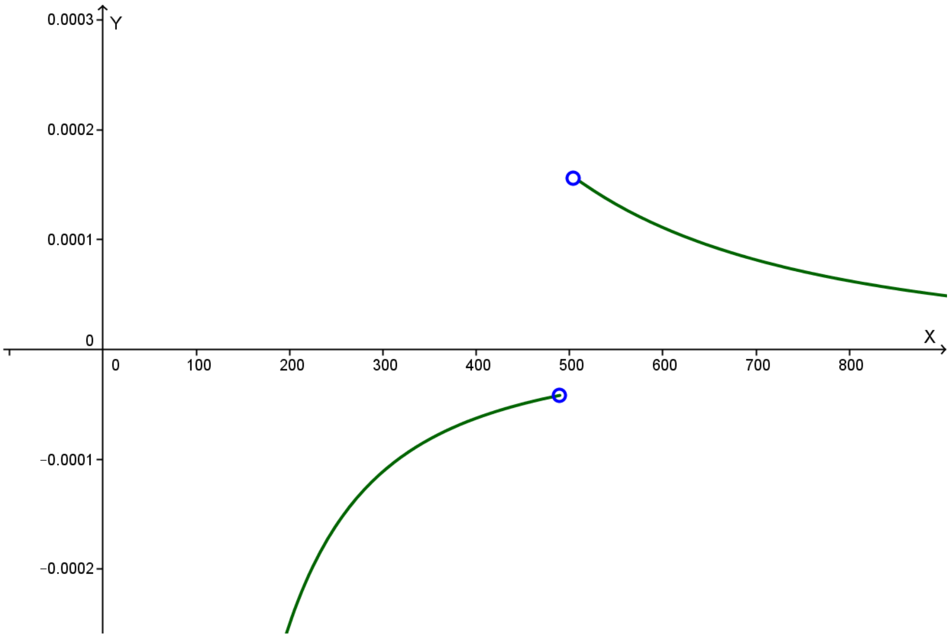


La nuova g è continua in tutto il suo dominio ma non è derivabile in x=500, dove c'è un punto angoloso.
La nuova g decresce fino al minuto 500, poi cresce, tendendo al costo medio pari a 0.2 euro al minuto; la nuova g ha un minimo assoluto per x=500 mentre non ha massimi (né relativi ne assoluti). Abbiamo ancora l'asintoto verticale x=0 ma adesso l'asintoto orizzontale è y=0.2.

Analizziamo infine la derivata della nuova g. Risulta:

$$g'(x) = \begin{cases} -\dfrac{10}{x^2}, & se \quad 0 < x < 500 \\ \dfrac{40}{x^2}, & se \;\; x > 500 \end{cases}$$

Tale derivata non è continua in x=500, dove ha una discontinuità di prima specie, come evidenziano il limite destro ed il limite sinistro ed il grafico seguente:



Con la collaborazione di Angela Santamaria