LICEO SCIENTIFICO 2015 - QUESTIONARIO

QUESITO 1

$y = f(x)$; il suo grafico è tangente alla retta $y = -2x + 5$ nel secondo quadrante ed inoltre risulta: $f'(x) = -2x^2 + 6$. Determinare l'equazione $y = f(x)$.

Risulta:

$f(x) = \int(-2x^2 + 6)\ dx = -\frac{2}{3}x^3 + 6x + k$ (*)

Inoltre deve essere $f'(x) = -2$ con x<0; quindi:

$-2x^2 + 6 = -2 \quad se \quad x = \pm 2\,, \quad per\ noi \quad x = -2$

Per x= -2 dall'equazione della retta troviamo y=4+5=9. Quindi la funzione passa per il punto di coordinate (-2;9). Imponiamo il passaggio per tale punto alla curva di equazione (*).

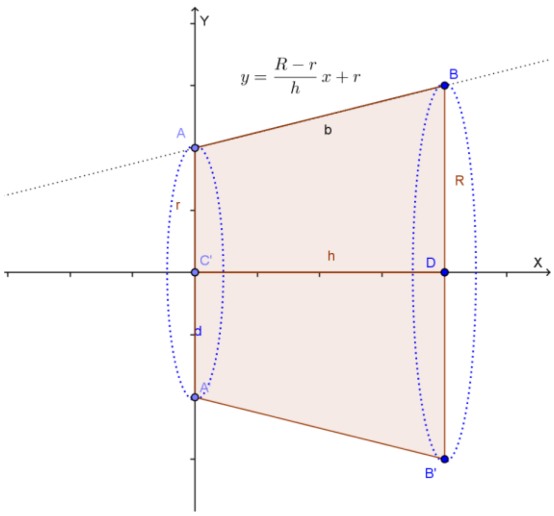
$9 = \frac{16}{3} - 12 + k \quad da\ cui \quad k = \frac{47}{3}$.

La funzione richiesta ha quindi equazione: $y = f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 6x + \frac{47}{3}$

QUESITO 2

Si chiede di determinare la formula del volume del tronco di cono:

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot h \cdot (R^2 + r^2 + R \cdot r)$$



Il volume del tronco si può ottenere, per esempio, come volume del solido ottenuto dalla rotazione del segmento di estremi $(0;r)$ e $(h;R)$ attorno all'asse delle x; la retta passante per gli estremi del segmento ha equazione:

$y = \frac{R-r}{h}x + r.$

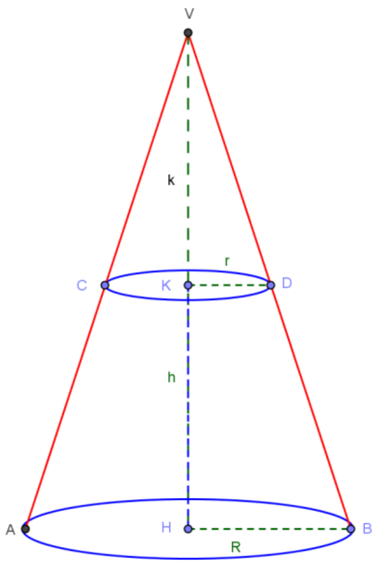
Il volume richiesto si ottiene quindi mediante il seguente integrale definito:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx = \pi \int_0^h \left[\frac{R-r}{h}x + r\right]^2 dx = \pi \int_0^h \left[\left(\frac{R-r}{h}\right)^2 x^2 + r^2 + 2r \cdot \frac{R-r}{h}x\right] \ dx =$$

$$= \pi \left[\left(\frac{R-r}{h}\right)^2 \cdot \frac{x^3}{3} + r^2x + \frac{r}{h} \cdot (R-r)x^2\right]_0^h = \pi \left[\left(\frac{R-r}{h}\right)^2 \cdot \frac{h^3}{3} + r^2h + \frac{r}{h} \cdot (R-r)h^2\right] =$$

$$= \pi \left[\frac{hr^2 + hRr + hR^2}{3}\right] = \frac{1}{3}\pi \cdot h \cdot (R^2 + r^2 + R \cdot r) = V$$

Dimostrazione geometrica



Indichiamo con V il vertice del cono C di cui fa parte il tronco e sia k l'altezza del cono C_1 che ha per base la base minore del tronco. Il volume del tronco si ottiene sottraendo al volume del cono C il volume del cono C_1.

Dalla similitudine dei triangoli rettangoli VHB e VKD si ha:

$$VH:VK = R:r \quad \Longrightarrow \quad (h+k):k = R:r$$

Quindi: $r(h+k) = kR, \quad rh + rk - kR = 0, \ \ k = \frac{rh}{R-r}$.
Si ha perciò:

$$V(C) = \frac{1}{3}\pi R^2(h+k) \qquad e \qquad V(C_1) = \frac{1}{3}\pi r^2 k$$

Segue che:

$$V(tronco) = V(C) - \ V(C_1) = \frac{1}{3}\pi R^2(h+k) - \frac{1}{3}\pi r^2 k =$$

$$= \frac{1}{3}\pi[R^2h + R^2k - r^2k] = \frac{1}{3}\pi[R^2h + k(R^2 - r^2)] = \frac{1}{3}\pi\left[R^2h + \frac{rh}{R-r}(R^2 - r^2)\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\pi\left[R^2h + \frac{rh}{R-r}(R-r)(R+r)\right] = \frac{1}{3}\pi[R^2h + rh(R+r)] = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + rR + r^2) = V$$

QUESITO 3

Lanciando una moneta sei volte qual è la probabilità che si ottenga testa "al più" due volte? Qual è la probabilità che si ottenga testa "almeno" due volte?

La probabilità che si ottenga testa in un lancio è ½ . La probabilità che si ottengano al più due teste in sei lanci è data da:

$$p(al\ più\ due\ teste\ in\ sei\ lanci) = p(0\ teste) + p(1\ testa) + p(2\ teste)$$

Si tratta di una distribuzione binomiale, quindi, indicando con n il numero di prove, con k il numero di "successi", con p la probabilità del "successo" e con q la probabilità dell'insuccesso si ha:

$$p(k,n) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

Nel nostro caso n=6 e p=1/2 e q=1/2, quindi:

$$p(0,6) = \binom{6}{0} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64} \quad , \quad p(1,6) = \binom{6}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 6 \cdot \frac{1}{64} = \frac{6}{64}$$

$$p(2,6) = \binom{6}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 15 \cdot \frac{1}{64} = \frac{15}{64}$$

$$p(al\ più\ due\ teste\ in\ sei\ lanci) = p(0\ teste) + p(1\ testa) + p(2\ teste) = \frac{1}{64} + \frac{6}{64} + \frac{15}{64}$$
$$= \frac{22}{64} = \frac{11}{32} \cong 0.344 \cong 34\%$$

Seconda domanda: $p(almeno\ due\ teste\ in\ sei\ lanci) = 1 - p(0\ teste) - p(1\ testa)$

Pertanto:

$$p(almeno\ due\ teste\ in\ sei\ lanci) = 1 - p(0\ teste) - p(1\ testa) = 1 - \frac{1}{64} - \frac{6}{64} = \frac{57}{64} \cong$$

$$\cong 0.891 \cong 89\%$$

QUESITO 4

$$y = \frac{\ln(x)}{x}, \quad y' = \frac{1-\ln(x)}{x^2}, \qquad y'' = \frac{2\ln(x)-3}{x^3}$$

Sostituiamo nella prima equazione differenziale: $y'' + 2 \cdot \frac{y'}{x} = y$;

$$\frac{2\ln(x)-3}{x^3} + 2 \cdot \frac{1-\ln(x)}{x^3} = \frac{\ln(x)}{x} \quad \Rightarrow 2\ln(x) - 3 + 2 - 2\ln(x) = x^2 \ln(x) :$$ NO

Sostituiamo nella seconda equazione differenziale: $y' + x \cdot y'' = 1$;

$$\frac{1-\ln(x)}{x^2} + \frac{2\ln(x)-3}{x^2} = 1 \quad \Rightarrow \ln(x) - 2 = x^2: \quad NO$$

Sostituiamo nella terza equazione differenziale: $x \cdot y' = \frac{1}{x} + y$;

$$\frac{1-\ln(x)}{\mathrm{x}} = \frac{1}{x} + \quad \frac{\ln(x)}{x} \quad \Rightarrow -\frac{\ln(x)}{x} = \frac{\ln(x)}{x}: \quad NO$$

Sostituiamo infine nella quarta equazione differenziale: $x^2 \cdot y'' + x \cdot y' + \frac{2}{x} = y$;

$$\frac{2\ln(x)-3}{\mathrm{x}} + \frac{1-\ln(x)}{\mathrm{x}} + \frac{2}{x} = \frac{\ln(x)}{x}; \quad \frac{\ln(x)}{x} = \frac{\ln(x)}{x} \qquad verificato!$$

QUESITO 5

Determinare un'espressione analitica della retta perpendicolare nell'origine al piano di equazione x + y – z = 0.

La retta perpendicolare al piano dato ha i parametri direttori proporzionali ai coefficienti di x, y e z; quindi la retta ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 + 1 \cdot t \\ y = 0 + 1 \cdot t \\ z = 0 - 1 \cdot t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = -t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ x = -z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

QUESITO 6

$f(x) = (x-1)^2 + (x-2)^2 + (x-3)^2 + (x-4)^2 + (x-5)^2$

Si chiede di trovare il minimo della funzione (definita per tutti gli x reali).

Calcoliamo la derivata prima:

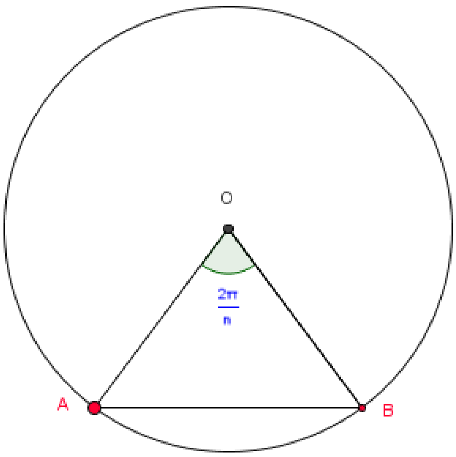
$f'(x) = 10x - 30 \geq 0 \quad se \quad x \geq 3 \quad quindi:$

il grafico della funzione è crescente se x>3 e decrescente se x<3 ; pertanto:

il minimo assoluto della funzione si ha per x=3 ed è $f(3) = 10$.

QUESITO 7

Indicando con O il centro della circonferenza e con AB il lato del poligono regolare inscritto di n lati, l'area $A(n) = S_n$ del poligono si ottiene moltiplicando per n l'area del triangolo AOB.



Essendo $A\hat{O}B = \frac{2\pi}{n}$ e ricordando che l'area di un triangolo si può calcolare come semiprodotto di due lati per il seno dell'angolo compreso, si ha:

$S_n = n \cdot Area(AOB) = n \cdot \left(\frac{1}{2} r \cdot r \cdot sen\left(\frac{2\pi}{n} \right) \right) = \frac{n}{2} r^2 sen\left(\frac{2\pi}{n} \right)$, come richiesto.

Risulta:

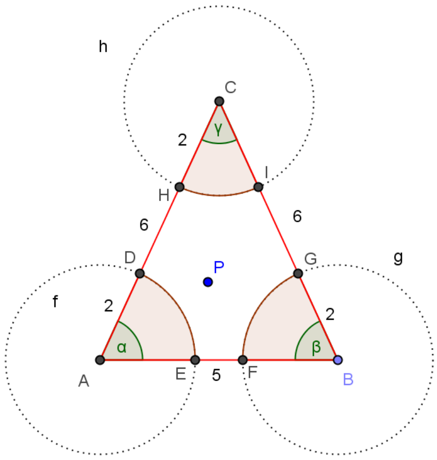
$$\lim_{n\to\infty}(S_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}r^2\text{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}r^2\frac{2\pi}{n}\left(\frac{\text{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{\frac{2\pi}{n}}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}r^2\frac{2\pi}{n}\cdot 1=\pi r^2$$

Come è noto, il limite ottenuto non è altro che l'area del cerchio.

QUESITO 8

I lati di un triangolo misurano, rispettivamente, 6 cm, 6 cm e 5 cm. Preso a caso un punto P all'interno del triangolo, qual è la probabilità che P disti più di 2 cm da tutti e tre i vertici del triangolo?



La probabilità richiesta è data dal rapporto tra "l'area favorevole" e "l'area possibile".

Area favorevole= area triangolo – area dei tre settori circolari di centri A,B e C con raggi 2 e ampiezze pari agli angoli interni del triangolo;
la somma dei tre settori equivale ad un settore circolare di ampiezza 180° (la somma dei tre angoli) e raggio 2, quindi ad un semicerchio di raggio 2: $\frac{\pi}{2}\cdot r^2=2\pi$.
Per calcolare l'area del triangolo ABC, isoscele sulla base AB, troviamo l'altezza h relativa a tale base:

$$h=\sqrt{6^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2}=\sqrt{36-\frac{25}{4}}=\sqrt{\frac{119}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{119}$$

Quindi:

$$Area\ (ABC) = \frac{5 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{119}}{2} = \frac{5}{4}\sqrt{119}$$

$$Area\ (favorevole) = \ area(ABC) - area\ dei\ tre\ settori\ circolari = \frac{5}{4}\sqrt{119} - 2\pi$$

Infine:

$$p = \frac{Area\ (favorevole)}{Area\ (possibile)} = \frac{\frac{5}{4}\sqrt{119} - 2\pi}{\frac{5}{4}\sqrt{119}} = 1 - \frac{8\pi}{5\sqrt{119}} \cong 0.539 \cong 54\%$$

QUESITO 9

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 - kx + k & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Dobbiamo determinare il parametro k in modo che nell'intervallo [0, 2] sia applicabile il teorema di Lagrange e trovare il punto di cui la tesi del teorema assicura l'esistenza.

Determiniamo k in modo che la funzione sia continua in x=1: si verifica facilmente che la funzione è continua per ogni k, poiché il limite destro, il limite sinistro ed il valore che la funzione assume in 1 sono uguali (esattamente ad 1).

Dobbiamo imporre che la funzione sia derivabile in x=1. Risulta:

in $0 \leq x < 1$: $f'(x) = 3x^2 \quad e \quad \lim_{x\to 1^-}(3x^2) = 3$
in $1 < x \leq 2$: $f'(x) = 2x - k \quad e \quad \lim_{x\to 1^+}(2x - k) = 2 - k$

Dovrà essere: $2 - k = 3 \quad \Rightarrow \quad k = -1$

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 + x - 1 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Per tale valore di k la funzione è continua nell'intervallo chiuso [0;2] e derivabile nell'aperto (0;2): quindi sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Lagrange. Pertanto esiste almeno un punto c interno all'intervallo tale che:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \quad \Rightarrow \quad \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = f'(c) = \frac{5 - 0}{2} = \frac{5}{2}$$

Osserviamo che se x=1 la derivata della funzione vale 3, quindi c non può essere 1; se x è diverso da 1 otteniamo:

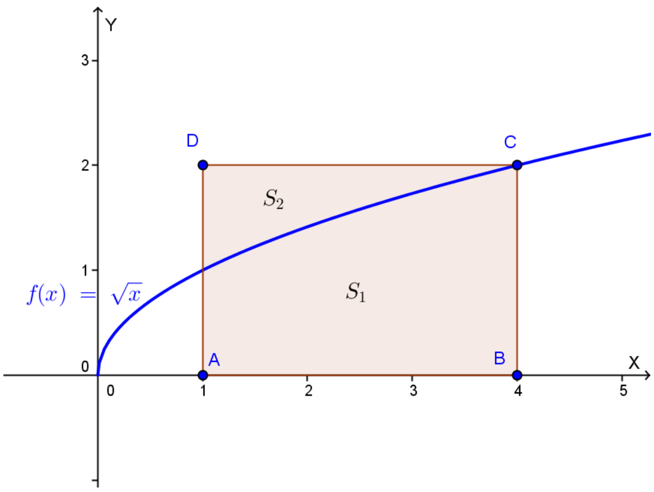
$Se\ \ 0 \leq x < 1$: $3x^2 = \dfrac{5}{2}$, $x^2 = \dfrac{5}{6}$ $x = \pm\sqrt{\dfrac{5}{6}}$ *quindi* $c = \sqrt{\dfrac{5}{6}}$

$Se\ \ 1 < x \leq 2$: $2x + 1 = \frac{5}{2}$, $2x = \frac{3}{2}$, $x = \frac{3}{4}$ *non accettabile*

Il punto di cui la tesi del teorema assicura l'esistenza è $c = \sqrt{\frac{5}{6}}$.

QUESITO 10

Rappresentiamo graficamente la funzione ed il rettangolo:



$A(rettangolo) = 3 \cdot 2\ u^2 = 6\ u^2$

$$S_1 = \int_1^4 \sqrt{x}\, dx = \int_1^4 x^{\frac{1}{2}}\, dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_1^4 = \frac{16}{3} - \frac{2}{3} = \frac{14}{3}\ \ u^2$$

$S_2 = 6\ u^2 - \frac{14}{3}\ u^2 = \frac{4}{3}\, u^2$.   Quindi:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{14}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{7}{2}$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria