LICEO SCIENTIFICO 2016 - PROBLEMA 1

L'amministratore di un piccolo condominio deve installare un nuovo serbatoio per il gasolio da riscaldamento. Non essendo soddisfatto dei modelli esistenti in commercio, ti incarica di progettarne uno che risponda alle esigenze del condominio.

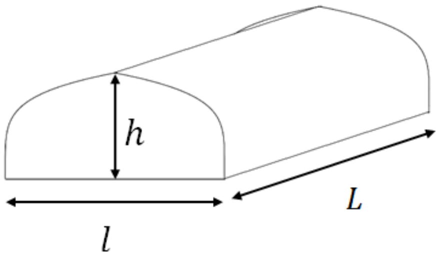


Figura 1

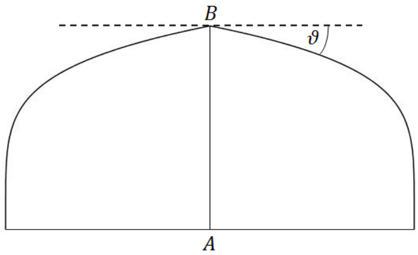


Figura 2

Allo scopo di darti le necessarie informazioni, l'amministratore ti fornisce il disegno in Figura 1, aggiungendo le seguenti indicazioni:

- *la lunghezza L del serbatoio deve essere pari a otto metri;*
- *la larghezza l del serbatoio deve essere pari a due metri;*
- *l'altezza h del serbatoio deve essere pari a un metro;*
- *il profilo laterale (Figura 2) deve avere un punto angoloso alla sommità, per evitare l'accumulo di ghiaccio durante i mesi invernali, con un angolo $\vartheta \geq 10°$;*
- *la capacità del serbatoio deve essere pari ad almeno $13\ m^3$, in modo da garantire al condominio il riscaldamento per tutto l'inverno effettuando solo due rifornimenti di gasolio;*
- *al centro della parete laterale del serbatoio, lungo l'asse di simmetria (segmento AB in Figura 2) deve essere installato un indicatore graduato che riporti la percentuale di riempimento V del volume del serbatoio in corrispondenza del livello z raggiunto in altezza dal gasolio.*

1)

Considerando come origine degli assi cartesiani il punto A in Figura 2, individua tra le seguenti famiglie di funzioni quella che meglio può descrivere il profilo laterale del serbatoio per $x \in [-1;1]$, k intero positivo, motivando opportunamente la tua scelta:

$$f(x) = (1 - |x|)^{\frac{1}{k}}$$

$$f(x) = -6|x|^3 + 9kx^2 - 4|x| + 1$$

$$f(x) = cos\left(\frac{\pi}{2}x^k\right)$$

Osserviamo che la funzione deve avere derivata infinita in x=1 (ed anche in x=-1); l'unica finzione che può soddisfare tale condizione è la prima, la cui derivata è (supponiamo x>0):

$$f'(x) = -\frac{1}{k}(1-x)^{\frac{1}{k}-1} = -\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{(1-x)^{1-\frac{1}{k}}}$$

e, notato che k>1 (non può essere k=1 altrimenti la funzione sarebbe $f(x) = 1 - |x|$ che non ha il grafico richiesto), si osserva che in x=1 abbiamo derivata infinita.

La funzione che meglio descrive il profilo laterale del serbatoio ha equazione:

$$\mathrm{f(x)} = (1 - |\mathrm{x}|)^{\frac{1}{\mathrm{k}}}$$

2)

Determina il valore di k che consente di soddisfare i requisiti richiesti relativamente all'angolo ϑ e al volume del serbatoio.

Osserviamo che deve essere $f'_+(0) = tg(-\vartheta) \leq tg(-10°)$ quindi:

$$-\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{(1-0)^{1-\frac{1}{k}}} = -\frac{1}{k} \leq -tg(10°),\ \ k \leq \frac{1}{tg(10°)}\ ,\ \ k \leq \frac{1}{0.18}\ ,\ \ k \leq 5.7, \qquad k \leq 5$$

Dobbiamo adesso imporre che il volume del serbatoio sia maggiore o uguale a $13\ \mathrm{m}^3$.

Detta $A(x)$ l'area della sezione (profilo laterale), il volume è dato da:

$$V = \int_0^L A(x)dx = \int_0^8 A(x)dx \geq 13$$

Osserviamo che, data la simmetria della sezione:

$$A(x) = 2\int_0^1 (1-\mathrm{x})^{\frac{1}{\mathrm{k}}}\ dx = 2\left[\frac{-(1-\mathrm{x})^{\frac{1}{\mathrm{k}}+1}}{\frac{1}{\mathrm{k}}+1}\right]_0^1 = -\frac{2k}{1+k}\left[(1-\mathrm{x})^{\frac{1}{\mathrm{k}}+1}\right]_0^1 = -\frac{2k}{1+k}(-1) = \frac{2k}{1+k}$$

Quindi:

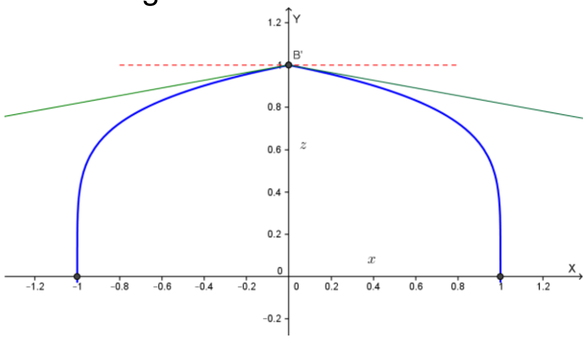
$$\int_0^8 A(x)dx = \int_0^8 \frac{2k}{1+k}dx = \frac{2k}{1+k}(8-0) = \frac{16k}{1+k} \geq 13, \qquad 3k \geq 13, \qquad k \geq \frac{13}{3} \cong 4.3$$

Ed essendo k intero positivo deve essere $k \geq 5$.

Le due condizioni trovate sono verificate entrambe se $k = 5$. La funzione richiesta è quindi:

$$f(x) = (1 - |x|)^{\frac{1}{5}}$$

Il grafico di questa funzione è il seguente:



3)

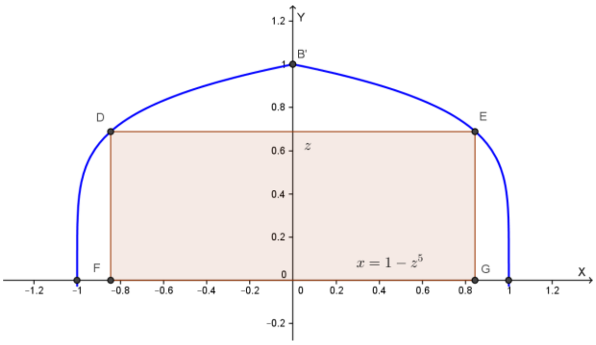
Al fine di realizzare l'indicatore graduato, determina l'espressione della funzione $V(z)$ che associa al livello z del gasolio (in metri) la percentuale di riempimento V del volume da riportare sull'indicatore stesso.

Indichiamo con z l'ordinata del generico punto della curva di equazione

$$f(x) = (1 - |x|)^{\frac{1}{5}} = z$$

Considerando x>0, avremo:

$z^5 = (1 - x), da\ cui: x = 1 - z^5 \quad con\ \ 0 \leq z \leq 1$



Detta $B(x)$ la sezione del serbatoio parallela alla base (di forma rettangolare), risulta:

$B(x) = 2x(8) = 16x = 16(1 - z^5) = B(z)$. Il Volume della parte di serbatoio di altezza z è quindi:

$$V(z) = \int_0^z B(z)dz = \int_0^z 16(1 - z^5)dz = 16\left[z - \frac{z^6}{6}\right]_0^z = 16\left(z - \frac{z^6}{6}\right) = V(z)$$

Notiamo che il volume del serbatoio è pari a $\frac{16k}{1+k}$ con k=5, quindi il volume dl serbatoio (in metri cubi) è pari a: $\frac{80}{6} = \frac{40}{3} \cong 13.3\ m^3$

La percentuale V di riempimento del serbatoio in funzione del livello z del gasolio si ottiene dalla seguente proporzione:

$$\frac{V}{100} = \frac{V(z)}{\frac{40}{3}} \quad , \quad V = \frac{15}{2} V(z) = \frac{15}{2}\left(16z - \frac{8}{3}z^6\right) = V$$

Notiamo che se $z = 0.5$ metri, si ha: $V = \frac{15}{2}\left(8 - \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{64}\right) \cong 59.7$; cioè a metà altezza non abbiamo il 50% del serbatoio pieno ma quasi il 60%. Vista la forma del serbatoio (più largo in basso) la cosa era prevedibile: non c'è proporzionalità diretta fra il livello del serbatoio e la percentuale di gasolio presente nel serbatoio.

Quando consegni il tuo progetto, l'amministratore obietta che essendo il serbatoio alto un metro, il valore z del livello di gasolio, espresso in centimetri, deve corrispondere alla percentuale di riempimento: cioè, ad esempio, se il gasolio raggiunge un livello z pari a 50 cm vuol dire che il serbatoio è pieno al 50%; invece il tuo indicatore riporta, in corrispondenza del livello 50 cm, una percentuale di riempimento 59,7%.

4)

Illustra gli argomenti che puoi usare per spiegare all'amministratore che il suo ragionamento è sbagliato; mostra anche qual è, in termini assoluti, il massimo errore che si commette usando il livello z come indicatore della percentuale di riempimento, come da lui suggerito, e qual è il valore di z in corrispondenza del quale esso si verifica.

Abbiamo già spiegato nel punto precedente che non c'è proporzionalità diretta tra la percentuale di riempimento del serbatoio e l'altezza del livello del gasolio presente nel serbatoio stesso.

La differenza tra il livello z e la percentuale di riempimento del serbatoio (l'errore che si commette usando z come indicatore della percentuale di riempimento) è data da:

$$d(z) = V - z \cdot 100 = \frac{15}{2}\left(16z - \frac{8}{3}z^6\right) - 100z = -20z^6 + 20z \ , \quad con\ 0 \le z \le 1$$

Cerchiamo il massimo di questa funzione:

$$d'(z) = -120z^5 + 20 \ge 0 \ \ se\ \ z \le \sqrt[5]{\frac{1}{6}} \cong 0.699$$

La funzione d(z) quindi cresce da 0 a 0.699 e decresce da 0.699 ad 1. Il massimo errore si ha quindi per $z \cong 0.7\ m \cong 70\ cm$; il massimo errore percentuale che si commette è pari a circa

$$d(0.7) = -20(0.7)^6 + 20(0.7) \cong 11.65 \cong 12\ \%$$

L'errore percentuale massimo si verifica quando l'altezza z è di circa 0.7 metri.

Con la collaborazione di Angela Santamaria