LICEO SCIENTIFICO 2016 - PROBLEMA 2

Nella figura 1 è rappresentato il grafico Γ della funzione continua $f: [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, derivabile in $]0,+\infty)$, e sono indicate le coordinate di alcuni suoi punti.

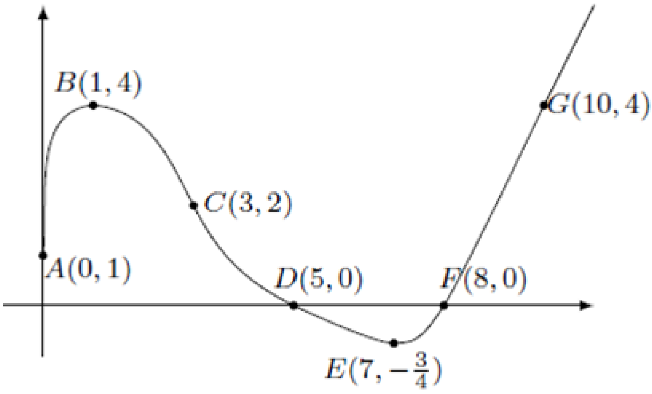


Figura 1

È noto che Γ è tangente all'asse y in A, che B ed E sono un punto di massimo e uno di minimo, che C è un punto di flesso con tangente di equazione 2x + y − 8 = 0.

Nel punto D la retta tangente ha equazione $x + 2y - 5 = 0$ e per $x \geq 8$ il grafico consiste in una semiretta passante per il punto G. Si sa inoltre che l'area della regione delimitata dall'arco $ABCD$, dall'asse x e dall'asse y vale 11, mentre l'area della regione delimitata dall'arco DEF e dall'asse x vale 1 ***(Vedi Appendice per tale valore errato).***

1)

In base alle informazioni disponibili, rappresenta indicativamente i grafici delle funzioni

$$y = f'(x)\,, \quad F(x) = \int_0^x f(t)dt$$

Quali sono i valori di $f'(3)$ e $f'(5)$? Motiva la tua risposta.

Studio della funzione $\mathbf{y = f'(x)}$

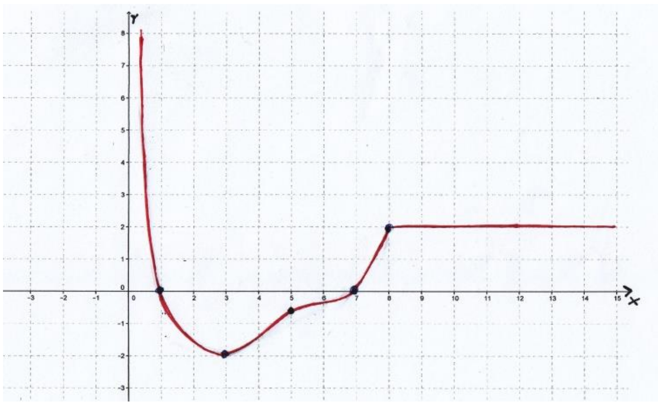
La funzione è definita in $]0,+\infty)$, si annulla per x=1 e per x=7, è positiva dove f è crescente, quindi per $0 < x < 1 \;\; e \;\; x > 7$, negativa in $1 < x < 7$.
I limiti alla frontiera sono:
$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = +\infty$, $\lim_{x\to +\infty} f'(x) = m$ dove m è il coefficiente angolare della retta FG, che è uguale a 2; quindi $f'(x)$ ha un asintoto orizzontale per x che tende a più infinito (in

realtà per x>8 il grafico è una retta orizzontale, y=2).

Studiamo la monotonia: $f'(x)$ cresce dove la sua derivata, cioè $f''(x)$ è positiva, quindi, guardando la concavità del grafico di f, cresce per $3 < x < 8$; $f'(x)$ decresce per $0 < x < 3$, è costante (ed uguale a 2) per x>8. La funzione ha quindi un minimo per x=3 con ordinata $f'(3) = -2$ (coefficiente angolare della tangente in C).

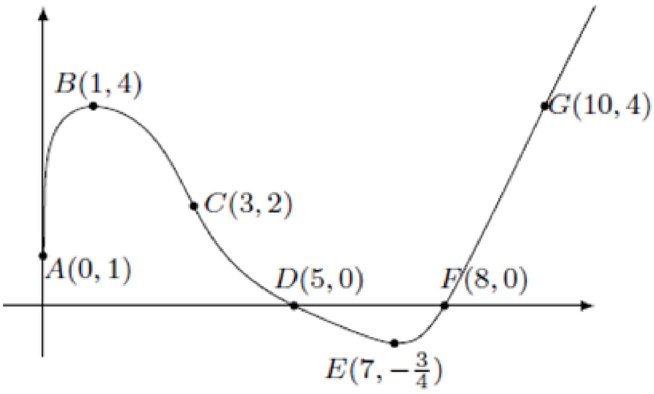
Dalle altre informazioni deduciamo che $f'(5) = -\frac{1}{2}$ (coefficiente angolare della data tangente in D).

Il grafico qualitativo di $y = f'(x)$ è il seguente:



Studio della funzione y $= F(x) = \int_0^x f(t)dt$

Riportiamo per comodità il grafico della f.



Osserviamo che, per il teorema di Torricelli, F(x) è continua in $[0, +\infty)$ e derivabile, con derivata $F'(x) = f(x)$. Si tratta di dedurre quindi dal grafico della derivata di una funzione il grafico della funzione.

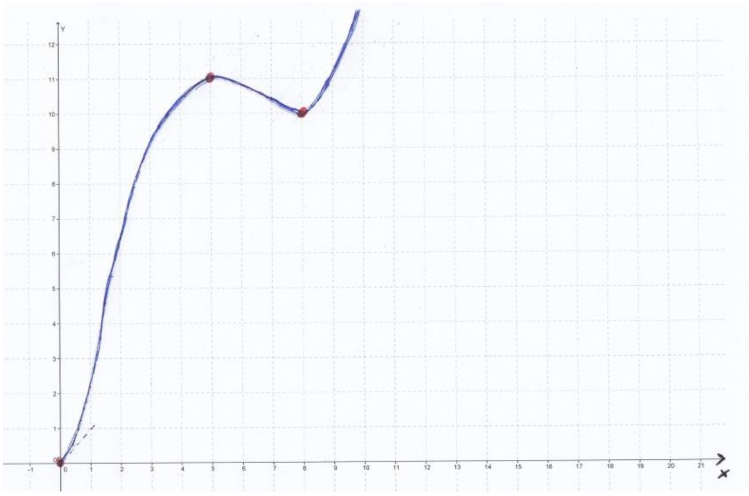
Dalle informazioni date e seguendo l'andamento dell'area compresa fra il grafico di f e l'asse delle x possiamo dedurre che:

F è positiva da 0 a 5 e cresce dal valore 0 al valore 11. Da 5 a 8 decresce, passando dal valore 11 al valore 11-1=10. Da 8 in poi cresce andando a più infinito. Quindi x=5 è punto di massimo relativo con ordinata 11 (punto a tangente orizzontale y=11); x=8 è punto di minimo relativo con ordinata 10 (punto a tangente orizzontale y=10).

Notiamo anche che dal grafico di f si può dedurre che $F'(0) = f(0) = 1$, quindi il grafico di F ha in x=0 tangente con coefficiente angolare 1.

La derivata prima di F è f, quindi la sua derivata seconda è f'. Dall'analisi precedente sul grafico di f' possiamo quindi dedurre che $F'' = f' > 0 \; se \; 0 < x < 1 \; e \; x > 7$: in tali intervalli quindi il grafico di F volge la concavità verso l'alto, nella parte rimanente del suo dominio verso il basso: x=1 e x=7 sono quindi punti di flesso per F.

Il grafico qualitativo di $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ è il seguente:



Calcoliamo ora i valori di $f'(3)$ *ed* $f'(5)$

Risulta $f'(3) = -2 \quad ed \quad f'(5) = -\frac{1}{2}$ come già detto e motivato nello studio del grafico della derivata di f.

2)

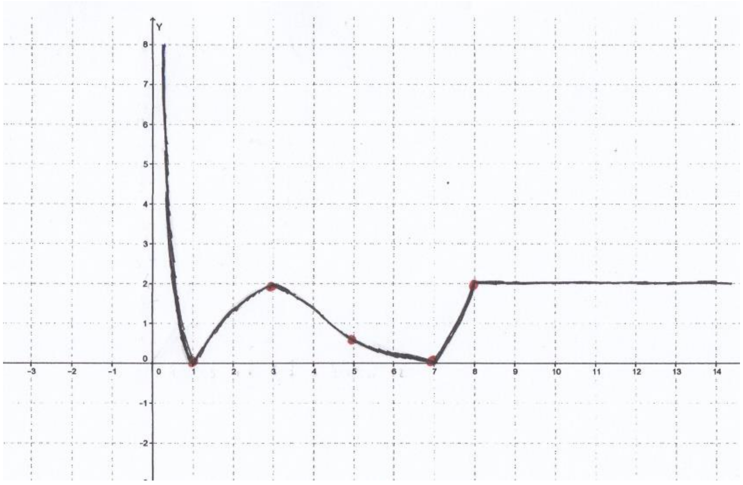
Rappresenta, indicativamente, i grafici delle seguenti funzioni:

$$y = |f'(x)| \quad , \quad y = |f(x)|' \; , \quad y = \frac{1}{f(x)}$$

specificando l'insieme di definizione di ciascuna di esse.

Studio della funzione $y = |f'(x)|$

Il grafico di tale funzione si ottiene da quello di $y = f'(x)$ confermando la parte positiva e ribaltando rispetto all'asse x la parte negativa. Il suo insieme di definizione coincide con quello di $f'(x)$: $0 < x < +\infty$. Il suo grafico qualitativo è il seguente:



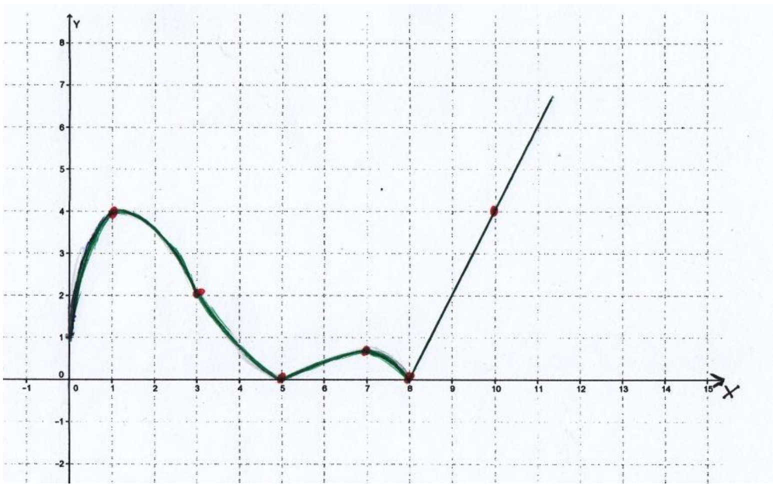
Studio della funzione $\boldsymbol{y = |f(x)|'}$

Osserviamo che: $|f(x)| = \begin{cases} f(x), \ se\ f(x) \geq 0:\ 0 \leq x \leq 5\ ,\ x \geq 8 \\ -f(x), \ se\ f(x) < 0:\ 5 < x < 8 \end{cases}$

Notiamo poi che in x=0 risulta f(x)=1 ed f non è derivabile; inoltre, se pensiamo al grafico di $|f(x)|$ scopriremo che x=5 e x=8 sono punti angolosi .

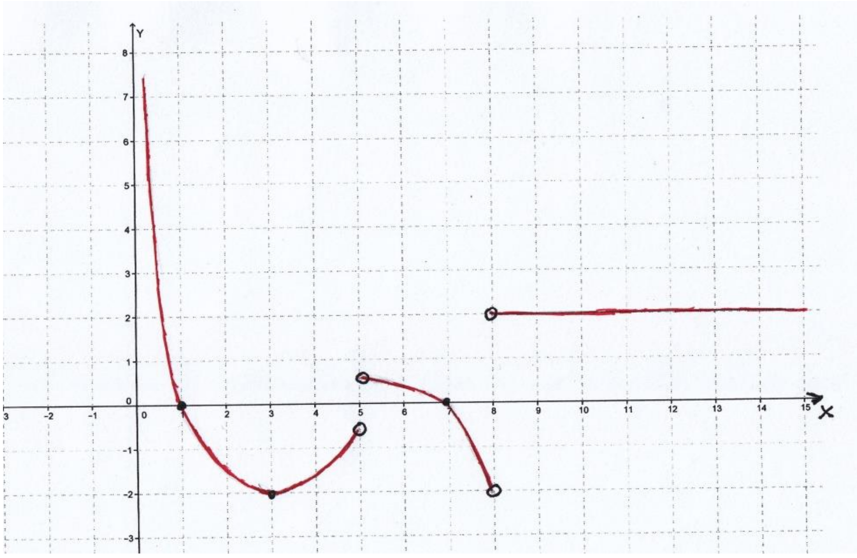
La funzione è quindi definita per $0 < x < 5\ , 5 < x < 8\ , x > 8$

Per il grafico conviene rappresentare prima la funzione $y = |f(x)|$ (confermando la parte positiva e ribaltando rispetto all'asse x la parte negativa).



Da questo grafico si deduce il grafico della derivata operando come fatto precedentemente per dedurre dal grafico di f quello di f' (nel tratto tra 5 e 8 basta ribaltare rispetto all'asse x il grafico di f').

Il grafico qualitativo è il seguente:



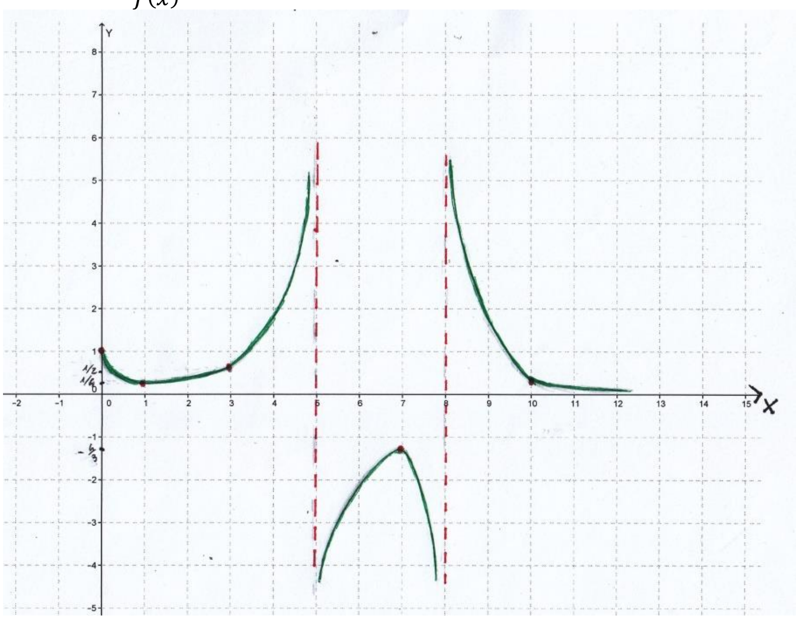
Studio della funzione $\boldsymbol{y = \frac{1}{f(x)}}$

Questa funzione ha l'insieme di definizione della f privata dei punti in cui si annulla, quindi:

$0 \leq x < 5\,, \qquad 5 < x < 8, \qquad 8 < x < +\infty$

Il segno è lo stesso di quello della f. La funzione non si annulla mai; x=5 e x=8 sono asintoti verticali. La funzione cresce dove f decresce e decresce dove f cresce. Dove f è massima 1/f è minima e dove f è minima 1/f è massima. Il minimo (relativo) di 1/f è $1/4$ ed il massimo (relativo) $-4/3$.

Grafico qualitativo di $y = \frac{1}{f(x)}$



3)

Determina i valori medi di $y = f(x)$ e di $y = |f(x)|$ nell'intervallo [0,8], il valore medio di $y = f'(x)$ nell'intervallo [1,7] e il valore medio di $y = F(x)$ nell'intervallo [9,10].

Valor medio di $\mathbf{y = f(x)}$ in [0; 8]:

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} = \frac{\int_0^8 f(x)dx}{8} = \frac{1}{8} \cdot F(8) = \frac{10}{8} = \mathbf{\frac{5}{4}}$$

Valor medio di $\mathbf{y = |f(x)|}$ in [0; 8]:

$$\frac{\int_0^8 |f(x)|dx}{8} = \frac{11+1}{8} = \frac{12}{8} = \mathbf{\frac{3}{2}}$$

(notiamo che 12 è l'area compresa fra il grafico di $y = |f(x)|$ e l'asse x da 0 e 8)

Valor medio di $\mathbf{y = f'(x)}$ in [1; 7]:

$$\frac{\int_a^b f'(x)dx}{b-a} = \frac{\int_1^7 f'(x)dx}{6} = \frac{f(7)-f(1)}{6} = \frac{-\frac{3}{4}-4}{6} = -\mathbf{\frac{19}{24}}$$

Valor medio di $\mathbf{y = F(x)}$ in [9; 10]:

$$\frac{\int_a^b F(x)dx}{b-a} = \frac{\int_9^{10} F(x)dx}{1} = \int_9^{10} F(x)dx$$

Ricordiamo che $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ e che $F(8) = 11 - 1 = 10$; inoltre per $x > 8$ la funzione f è la retta passante per (8; 0) e (10; 4), quindi ha equazione: $y = 2(x-8)$.

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^8 f(t)dt + \int_8^x f(t)dt = F(8) + \int_8^x 2(t-8)dt = 10 + 2\left[\frac{t^2}{2} - 8t\right]_8^x =$$

$$= 10 + 2\left[\frac{1}{2}x^2 - 8x - (32-64)\right] = x^2 - 16x + 74$$

Pertanto:

$$\int_9^{10} F(x)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - 8x^2 + 74x\right]_9^{10} = \frac{37}{3} = \textit{valor medio di } F(X) \textit{ in } [9;10]$$

4)

Scrivi le equazioni delle rette tangenti al grafico della funzione $F(x)$ nei suoi punti di ascisse 0 e 8, motivando le risposte.

Tangente nel punto di ascissa x=0.

$y - F(0) = F'(0)(x - 0)$; risulta $F(0) = 0$ ed $F'(0) = f(0) = 1$. Quindi la tangente ha equazione:

$y - 0 = 1 \cdot (x - 0)$, $y = x$

Tangente nel punto di ascissa x=8.

$y - F(8) = F'(8)(x - 8)$; risulta $F(8) = \int_0^8 f(t)dt = 11 - 1 = 10$ ed $F'(8) = f(8) = 0$. Quindi la tangente ha equazione:

$y - 10 = 0 \cdot (x - 8)$, $y = 10$, come già detto nello studio della funzione $F(x) = \int_0^x f(t)dt$

Appendice

Osserviamo che l'area della regione delimitata dall'arco DEF e dall'asse x è maggiore di 1, ma le domande poste non sono, per fortuna, condizionato da questa svista grafica. Che tale area sia maggiore di 1 lo si può dedurre dal fatto che nella regione in questione si può inscrivere un triangolo di base 3 e altezza 3/4, con area pari quindi a 9/8, che è maggiore di 1. Era sufficiente che l'estensore del problema indicasse come valore di questa area, per esempio, 2, senza cambiare la sostanza delle domande poste.

Con la collaborazione di Angela Santamaria