LICEO SCIENTIFICO 2016 - QUESTIONARIO

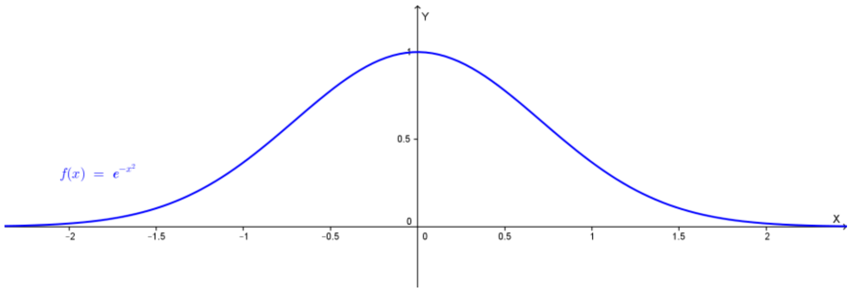
QUESITO 1

È noto che $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

Stabilire se il numero reale u*, tale che* $\int_{-\infty}^{u} e^{-x^2} dx = 1$ *, è positivo o negativo. Determinare inoltre i valori dei seguenti integrali, motivando le risposte:*

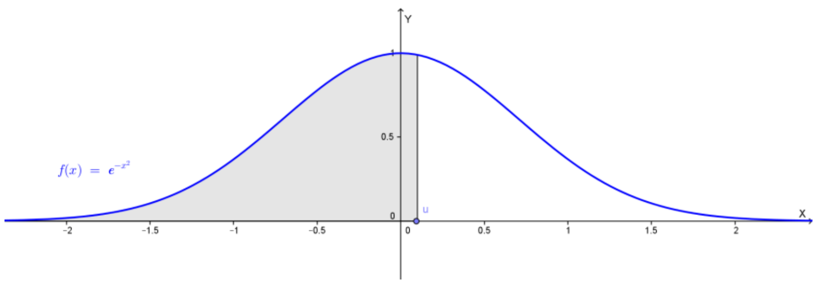
$$A = \int_{-u}^{u} x^7 e^{-x^2} dx \qquad B = \int_{-u}^{u} e^{-x^2} dx \qquad C = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-5x^2} dx$$

Osserviamo che la funzione $f(x) = e^{-x^2}$ è pari e positiva ed il suo grafico è del tipo:



Il valore dell'integrale fornito è uguale all'area compresa fra il grafico della funzione e l'asse delle x.

Dalla simmetria del grafico deduciamo che $\int_{-\infty}^{0} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} < 1$. Quindi, essendo $\int_{-\infty}^{u} e^{-x^2} dx = 1$, deve essere $u > 0$:



Per calcolare l'integrale A osserviamo che la funzione integranda è dispari, quindi, l'integrale è nullo: $A = \int_{-u}^{u} x^7 e^{-x^2} dx = 0$.

Calcoliamo l'integrale B:

$$B = \int_{-u}^{u} e^{-x^2}dx = 2\int_{0}^{u} e^{-x^2}dx = 2\left(\int_{-\infty}^{u} e^{-x^2}dx - \int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}dx\right) = 2\left(1 - \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) = 2 - \sqrt{\pi} = B$$

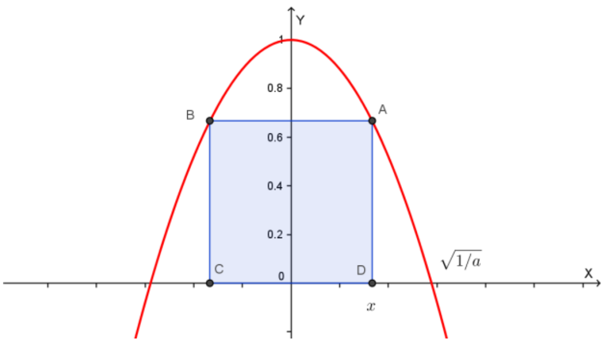
Calcoliamo l'integrale C. Effettuando la sostituzione $\sqrt{5}x = t$ otteniamo $\sqrt{5}dx = dt$, quindi (notato che se $x \to \pm\infty$ anche $t \to \pm\infty$):

$$C = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-5x^2}dx = C = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\frac{1}{\sqrt{5}}\,dt = \frac{1}{\sqrt{5}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\sqrt{\pi} = \sqrt{\frac{\pi}{5}} = C$$

QUESITO 2

Data una parabola di equazione $y = 1 - ax^2$, $con\ \ a > 0$ *si vogliono inscrivere dei rettangoli, con un lato sull'asse* x*, nel segmento parabolico delimitato dall'asse* x*. Determinare* a *in modo tale che il rettangolo di area massima sia anche il rettangolo di perimetro massimo.*

La parabola ha il seguente grafico:



Indicata con x l'ascissa del vertice A del rettangolo appartenente al primo quadrante, con

$$0 \le x \le \sqrt{\frac{1}{a}}$$

risulta:

$$Area(ABCD) = 2x(1 - ax^2) = 2x - 2ax^3 = A(x)$$

Calcoliamo la derivata prima:

$$A'(x) = 2 - 6ax^2 \ge 0 \quad se \quad x^2 \le \frac{1}{3a}: \quad -\sqrt{\frac{1}{3a}} \le x \le \sqrt{\frac{1}{3a}}$$

La funzione è quindi crescente da 0 a $\sqrt{\frac{1}{3a}}$ e decrescente da $\sqrt{\frac{1}{3a}}$ fino a $\sqrt{\frac{1}{a}}$:

l'area è quindi massima se $x = \sqrt{\frac{1}{3a}}$.

Calcoliamo il perimetro del rettangolo:

$2p(ABCD) = 4x_A + 2y_A = 2(2x + 1 - ax^2)$; questa funzione è massima se lo è:

$$y = -ax^2 + 2x + 1$$

Si tratta di una parabola con la concavità rivolta verso il basso, quindi il massimo si ha in corrispondenza del vertice:

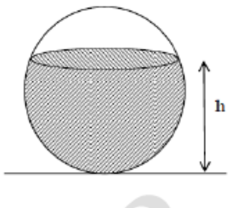
$x_V = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{a}$ (che soddisfa le limitazioni della x).

Affinché l'area ed il perimetro del rettangolo siano entrambi massimi deve essere:

$$\sqrt{\frac{1}{3a}} = \frac{1}{a} \;, \;\; da\ cui \;\; \frac{1}{3a} = \frac{1}{a^2} \;\; quindi \;\; a = 3.$$

QUESITO 3

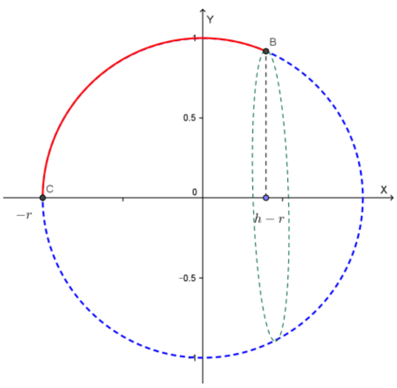
Un recipiente sferico con raggio interno r è riempito con un liquido fino all'altezza h.



Utilizzando il calcolo integrale, dimostrare che il volume del liquido è dato da:

$$V = \pi \cdot \left(rh^2 - \frac{h^3}{3}\right).$$

Il volume richiesto si può ottenere dalla rotazione completa attorno all'asse x dell'arco della circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = r^2$ con estremi $(-r; 0)$ e $(h - r; 0)$:



$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx = \pi \int_{-r}^{h-r} y^2 dx = \pi \int_{-r}^{h-r} (r^2 - x^2)dx =$$

$$= \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{-r}^{h-r} = \cdots = \pi \cdot \left(rh^2 - \frac{h^3}{3}\right) = V$$

QUESITO 4

Un test è costituito da 10 domande a risposta multipla, con 4 possibili risposte di cui solo una è esatta. Per superare il test occorre rispondere esattamente almeno a 8 domande. Qual è la probabilità di superare il test rispondendo a caso alle domande?

Si tratta di una distribuzione binomiale con n=10, p=1/4 (probabilità di 1 successo, cioè di rispondere correttamente ad una domanda) e q=3/4.
La probabilità di avere almeno 8 successi equivale a:

$$p = p(10,8) + p(10,9) + p(10,10) = \binom{10}{8}\left(\frac{1}{4}\right)^8\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \binom{10}{9}\left(\frac{1}{4}\right)^9\left(\frac{3}{4}\right) + \binom{10}{10}\left(\frac{1}{4}\right)^{10}\left(\frac{3}{4}\right)^0 =$$

$$= \frac{436}{4^{10}} \cong 0.000416 = 0{,}042\ \% = p(x \geq 8)$$

QUESITO 5

Una sfera, il cui centro è il punto $K(-2,-1,2)$, è tangente al piano Π avente equazione $2x - 2y + z - 9 = 0$. Qual è il punto di tangenza? Qual è il raggio della sfera?

Il punto di tangenza si ottiene intersecando la retta r passante per il centro e perpendicolare al piano tangente con il piano stesso. Tale retta ha per parametri direttori i coefficienti (2, -2, 1) del piano; la sua equazione è quindi:

$$\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = -1 - 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

Intersechiamo questa retta con il piano tangente:

$$2(-2 + 2t) - 2(-1 - 2t) + (2 + t) - 9 = 0\,, \ldots, t = 1$$

Il punto di tangenza ha quindi coordinate: $T = (0;\ -3; 3)$.

Il raggio della sfera si ottiene calcolando la distanza KT:

$$raggio\ sfera = \sqrt{(-2-0)^2 + (-1+3)^2 + (2-3)^2} = 3$$

QUESITO 6

Si stabilisca se la seguente affermazione è vera o falsa, giustificando la risposta:

"Esiste un polinomio $P(x)$ tale che: $|P(x) - \cos(x)| \leq 10^{-3}$, $\forall x \in \mathbb{R}$".

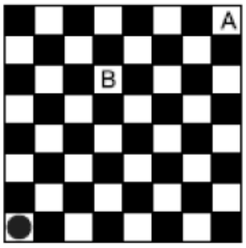
L'affermazione è falsa.

$|P(x) - \cos(x)|$ rappresenta la distanza fra i punti $A = (x; P(x))$ e $B = (x; \cos(x))$.

Osserviamo che la funzione polinomiale $y = P(x)$, di grado non nullo, è illimitata, quindi, per esempio, quando x tende a più infinito essa tende a più o meno infinito. La funzione coseno è invece limitata fra -1 e 1: la distanza AB tende quindi a più infinito e pertanto non esiste alcun polinomio per cui valga la disuguaglianza indicata PER OGNI X REALE. Se il polinomio ha grado zero (quindi $P(x) = k$), la relazione $|k - \cos(x)| \leq 10^{-3}$ non può essere verificata PER OGNI X REALE.

QUESITO 7

Una pedina è collocata nella casella in basso a sinistra di una scacchiera, come in figura. Ad ogni mossa, la pedina può essere spostata o nella casella alla sua destra o nella casella sopra di essa. Scelto casualmente un percorso di 14 mosse che porti la pedina nella casella d'angolo opposta A, qual è la probabilità che essa passi per la casella indicata con B?



Per raggiungere la posizione A la pedina deve spostarsi di 7 caselle a destra e di 7 in alto; i possibili percorsi sono quindi pari alle permutazioni con ripetizioni di 14 oggetti (le mosse) di cui 7 uguali fra di loro (spostamenti a destra) e altri 7 uguali fra di loro (spostamenti in alto):

$$numero\ percorsi\ possibili = \frac{14!}{7!\,7!} = 3432$$

Per raggiungere la posizione B la pedina deve spostarsi di 3 caselle a destra e di 5 in alto; i possibili percorsi sono quindi pari alle permutazioni con ripetizioni di 8 oggetti (le mosse necessarie per raggiungere B) di cui 3 uguali fra di loro (spostamenti a destra) e altri 5 uguali fra di loro (spostamenti in alto):

$$numero\ percorsi\ favorevoli\ fino\ a\ B = \frac{8!}{3!\,5!} = 56$$

La pedina deve poi spostarsi da B ad A, poiché sono richieste 14 mosse e per far ciò deve spostarsi di 4 caselle a destra e di 2 in alto; tali spostamenti sono quindi dati da:

$$numero\ percorsi\ da\ B\ ad\ A = \frac{6!}{4!\,2!} = 15$$

Quindi il numero dei percorsi favorevoli è dato dal prodotto $56 \cdot 15 = 840$

La probabilità richiesta è quindi:

$$p=\frac{numero\ percorsi\ favorevoli}{numero\ percorsi\ possibili}=\frac{840}{3432}=\frac{35}{143}\cong 0.2448=24.5\ \%$$

QUESITO 8

Data la funzione $f(x)$ definita in $\mathbb{R}$, $f(x)=e^x(2x\ +\ x^2)$, individuare la primitiva di $f(x)$ il cui grafico passa per il punto $(1,2e)$.

Integrando due volte per parti si ha:

$$\int e^x(2x\ +\ x^2)dx=(2x+x^2)e^x-\int(2+2x)e^x dx=$$
$$=(2x+x^2)e^x-\left[(2+2x)e^x-\int 2e^x\,dx\right]=(2x+x^2)e^x-(2+2x)e^x+2\,e^x+k=$$
$$=x^2e^x+k$$

La primitiva passante per $(1,2e)$ si ottiene ponendo:

$$2e=1^2e^1+k,\quad da\ cui\quad k=e$$

La primitiva di $\mathrm{f(x)}$ il cui grafico passa per il punto $(1,2\mathrm{e})$ ha quindi equazione:

$$y=x^2e^x+e$$

QUESITO 9

Date le rette

$$\begin{cases}x=t\\y=2t\\z=t\end{cases}\qquad\qquad\begin{cases}x+y+z-3=0\\2x-y=0\end{cases}$$

e il punto $P(1,0,-2)$ determinare l'equazione del piano passante per P e parallelo alle due rette.

Cerchiamo i parametri direttori della seconda retta scrivendola in forma parametrica; ponendo x=h nella seconda equazione otteniamo y=2h, quindi dalla prima z=3-3h; la retta ha quindi equazioni parametriche:

$$\begin{cases}x=h\\y=2h\\z=3-3h\end{cases}$$

I parametri direttori della prima retta sono (1,2,1), quelli della seconda retta (1,2,-3).
I parametri direttori del piano (a,b,c) devono quindi soddisfare le seguenti condizioni di parallelismo retta-piano:

$$\begin{cases} a+2b+c=0 \\ a+2b-3c=0 \end{cases}, \quad \begin{cases} c=0 \\ a=-2b \end{cases}$$

Ricordiamo che il piano passante per un punto con dati parametri direttori ha equazione del tipo: $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$, quindi il nostro piano ha equazione:

$$-2b(x-1)+b(y-0)+0(z+2)=0 \;, \quad 2x-y-2=0$$

(osserviamo che b non può essere nullo, altrimenti lo sarebbero anche a e c e ciò non è possibile).

QUESITO 10

Sia f la funzione così definita nell'intervallo $]1,+\infty)$:

$$f(x)=\int_e^{x^2}\frac{t}{ln\, t}\,dt$$

Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f nel suo punto di ascissa $\sqrt{e}$.

Calcoliamo l'ordinata del punto:

$$f(\sqrt{e})=\int_e^{e}\frac{t}{\ln t}\,dt=0$$

Il coefficiente angolare della tangente è dato da $f'(\sqrt{e})$. Ricordiamo la seguente proprietà sulla derivata della funzione integrale (conseguenza del teorema fondamentale del calcolo integrale e del teorema sulla derivata della funzione composta):

Se $F(x)=\int_a^{g(x)}f(t)\;dt$ allora $F'(x)=f(g(x))\cdot g'(x)$

Nel nostro caso si ha: $f'(x)=\frac{x^2}{\ln(x^2)}\cdot 2x$, quindi: $f'(\sqrt{e})=2e\sqrt{e}$. La tangente ha quindi equazione:

$$y-y_0=m(x-x_0)\,, \quad y-0=2e\sqrt{e}\left(x-\sqrt{e}\right), \quad y=2e\sqrt{e}\cdot x-2e^2$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria