LICEO SCIENTIFICO 2017 - PROBLEMA 1

Si può pedalare agevolmente su una bicicletta a ruote quadrate? A New York, al MoMath-Museum of Mathematics si può fare, in uno dei padiglioni dedicati al divertimento matematico (figura 1). È però necessario che il profilo della pedana su cui il lato della ruota può scorrere soddisfi alcuni requisiti.
In figura 2 è riportata una rappresentazione della situazione nel piano cartesiano Oxy: il quadrato di lato $DE = 2$ (in opportune unità di misura) e di centro C rappresenta la ruota della bicicletta, il grafico della funzione $f(x)$ rappresenta il profilo della pedana.

Figura 1

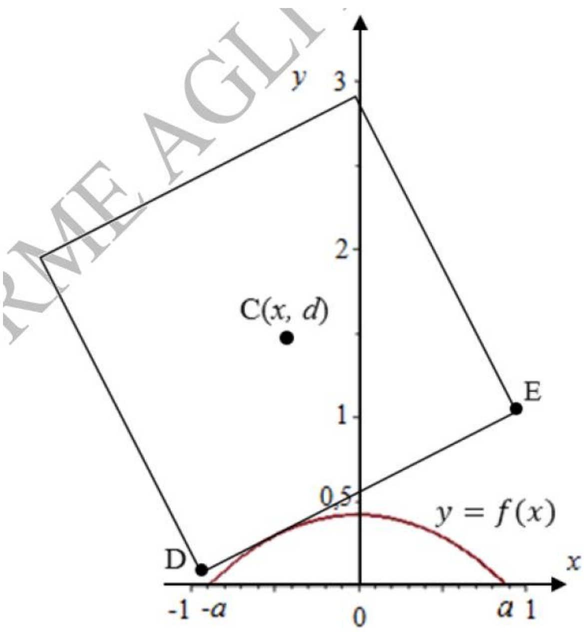


Figura 2

1)

Sulla base delle informazioni ricavabili dal grafico in Figura 2, mostra, con le opportune argomentazioni, che la funzione:

$$f(x) = \sqrt{2} - \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad x \in \mathbb{R}$$

rappresenta adeguatamente il profilo della pedana per $x \in [-a\,; a]$; determina inoltre il valore degli estremi a e $-a$ dell'intervallo.

Cerchiamo le intersezioni con gli assi del grafico della funzione f(x):

se $x = 0, y = \sqrt{2} - 1$; se $y = 0$, $\sqrt{2} - \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 0$, $2\sqrt{2} - e^x - e^{-x} = 0$,

$2\sqrt{2}\, e^x - e^{2x} - 1 = 0$, $e^{2x} - 2\sqrt{2}\, e^x + 1 = 0$, $e^x = \sqrt{2} \pm \sqrt{1} = \sqrt{2} \pm 1$,

$x = ln(\sqrt{2} \pm 1\ )$, $quindi$: $a = ln(\sqrt{2} + 1\ ) \cong 0.88$; notiamo che

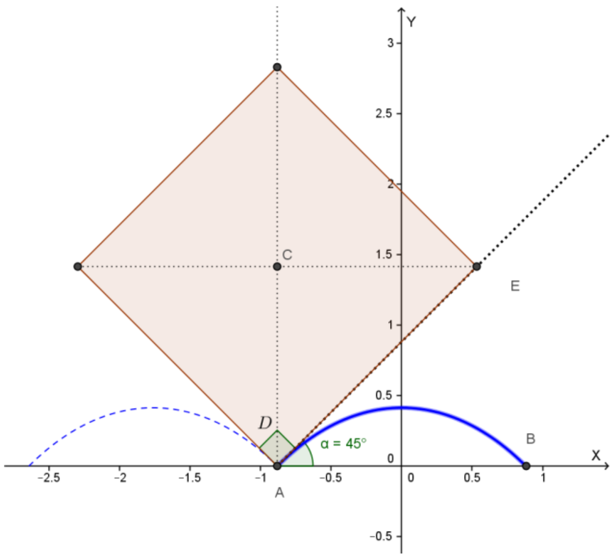
$ln(\sqrt{2} - 1\ ) = ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right) = -ln(\sqrt{2} + 1\ )$

Risulta quindi: $[-a\ ;\ a] = [-ln(\sqrt{2} + 1\ )\ ;\ ln(\sqrt{2} + 1\ )]$

La tangente al grafico della curva nel punti (-a; 0) ha coefficiente angolare $f'(-a)$.

Risulta:

$f'(x) = -\frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $f'(-a) = \frac{e^a - e^{-a}}{2} = \frac{\sqrt{2}+1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)}{2} = \frac{\sqrt{2}+1-(\sqrt{2}-1)}{2} = 1$; la tangente in $A = (-a;\ 0)$ forma quindi un angolo di 45° con l'asse x. Quando D coincide con A il lato DE coincide con la tangente al profilo della pista in A e il centro della ruota si trova sulla verticale per A.




BELIEVE IT OR NOT, HE'S ON A ROLL

Associated Press

Math professor Stan Wagon demonstrates his square-wheeled bicycle at Macalester College in St. Paul, Minn. In 1960, it was discovered that a square wheel would roll smoothly on a road made of catenaries (those bumpy things). Wagon said he became interested in the concept 7 years ago, did calculations and computer animations, then had the bike specially built.

Pertanto la funzione $f(x) = \sqrt{2} - \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ $x \in \mathbb{R}$ rappresenta adeguatamente il profilo della pedana.

Per visualizzare il profilo completo della pedana sulla quale la bicicletta potrà muoversi, si affiancano varie copie del grafico della funzione $f(x)$ relativo all'intervallo $[-a\,;\,a]$, come mostrato in Figura 3.

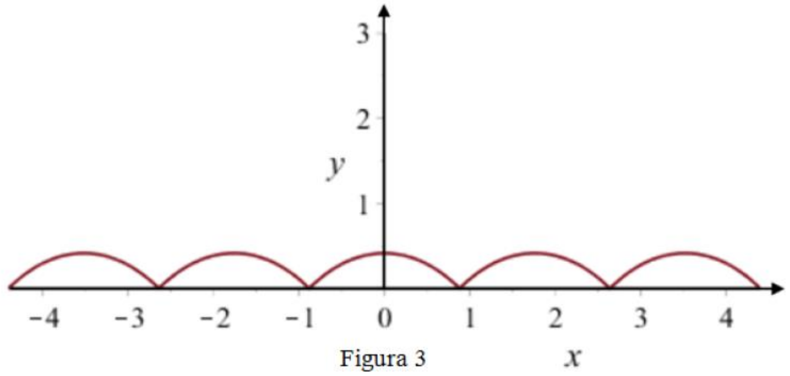


Figura 3

2)

Perché la bicicletta possa procedere agevolmente sulla pedana è necessario che:

- *a sinistra e a destra dei punti di non derivabilità i tratti del grafico siano ortogonali;*
- *la lunghezza del lato della ruota quadrata risulti pari alla lunghezza di una "gobba", cioè dell'arco di curva di equazione $y = f(x)$ per $x \in [-a;\ a]$.*

Stabilisci se tali condizioni sono verificate.

[N.B. In generale, la lunghezza dell'arco di curva avente equazione $y = \varphi(x)$ compreso tra le ascisse x_1 e x_2 è data da $\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+(\varphi'(x))^2}\,dx$].

Abbiamo già detto nel punto precedente che la tangente destra nel punto $A = (-a;\ 0)$ ha coefficiente angolare 1; la tangente sinistra nel punto A è parallela alla tangente sinistra nel punto $B = (a;\ 0)$; il coefficiente angolare della tangente sinistra in B è:

$f'(a) = \frac{e^{-a}-e^{a}}{2} = -f'(-a) = -1$: quindi $f'(a)\cdot f'(-a) = (-1)(1) = -1$.

Le tangenti destra e sinistra in A sono quindi ortogonali.

Verifichiamo che la lunghezza l di una gobba è pari a 2 (lato della ruota).

$$l = \int_{-a}^{a} \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx = 2\int_{0}^{a} \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx = 2\int_{0}^{a} \sqrt{1+\left(-\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2}\,dx =$$

$$= 2\int_{0}^{a} \sqrt{1+\left(\frac{e^{2x}+e^{-2x}-2}{4}\right)}\,dx = 2\int_{0}^{a} \sqrt{\frac{2+e^{2x}+e^{-2x}}{4}}\,dx = \int_{0}^{a} \sqrt{2+e^{2x}+e^{-2x}}\,dx =$$

$$= \int_{0}^{a} \sqrt{\frac{2e^{2x}+e^{4x}+1}{e^{2x}}}\,dx = \int_{0}^{a} \sqrt{\left(\frac{e^{2x}+1}{e^x}\right)^2}\,dx = \int_{0}^{a} \left(\frac{e^{2x}+1}{e^x}\right)dx = \int_{0}^{a} (e^x+e^{-x})\,dx =$$

$$= [e^x - e^{-x}]_0^a = e^a - e^{-a} - (1-1) = e^{\ln(\sqrt{2}+1)} - e^{\ln(\sqrt{2}-1)} = \sqrt{2}+1-(\sqrt{2}-1) = 2 = lato\ ruota$$

3)

Considerando la similitudine dei triangoli rettangoli ACL e ALM in Figura 4, e ricordando il significato geometrico della derivata, verifica che il valore dell'ordinata d del centro della ruota si mantiene costante durante il moto. Pertanto, al ciclista sembra di muoversi su una superficie piana.

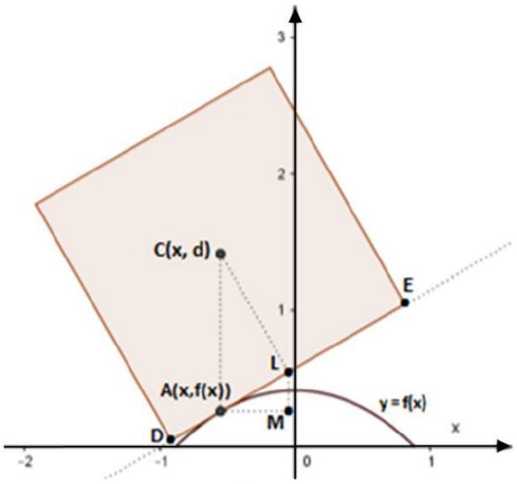


Figura 4

I due triangoli ACL e ALM sono simili essendo rettangoli (in L ed M rispettivamente) ed essendo l'angolo MAL congruente all'angolo ACL poiché complementari dello stesso angolo CAL. Indicato con α l'angolo LAM, risulta:

$$f'(x) = tg(\alpha) = \frac{LM}{AM} = \frac{AL}{CL} = \frac{AL}{1} = AL; \quad quindi \quad AL = f'(x) = -\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^{-x} - e^x}{2}$$

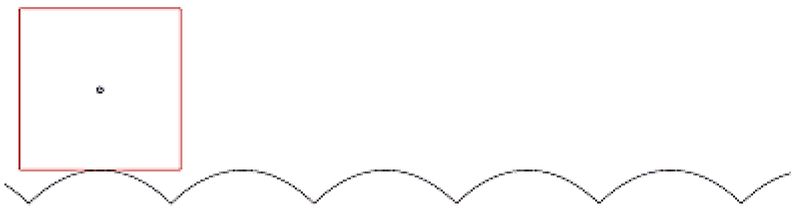
Ma è anche:

$$AL = \sqrt{AC^2 - CL^2} = \sqrt{\left(d - f(x)\right)^2 - 1} = \frac{e^{-x} - e^x}{2}, \quad \left(d - f(x)\right)^2 - 1 = \frac{e^{-2x} + e^{2x} - 2}{4}$$

$$\left(d - f(x)\right)^2 = 1 + \frac{e^{-2x} + e^{2x} - 2}{4} = \frac{2 + e^{-2x} + e^{2x}}{4} = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2, \qquad quindi:$$

$$d - f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad d = f(x) + \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sqrt{2} - \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sqrt{2}$$

Quindi l'ordinata d del centro della ruota è costante ed uguale a $\sqrt{2}$.



Anche il grafico della funzione:

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad , \qquad per \quad x \in \left[-\frac{\ln(3)}{2}; \frac{\ln(3)}{2}\right]$$

se replicato varie volte, può rappresentare il profilo di una pedana adatta a essere percorsa da una bicicletta con ruote molto particolari, aventi la forma di un poligono regolare.

4)

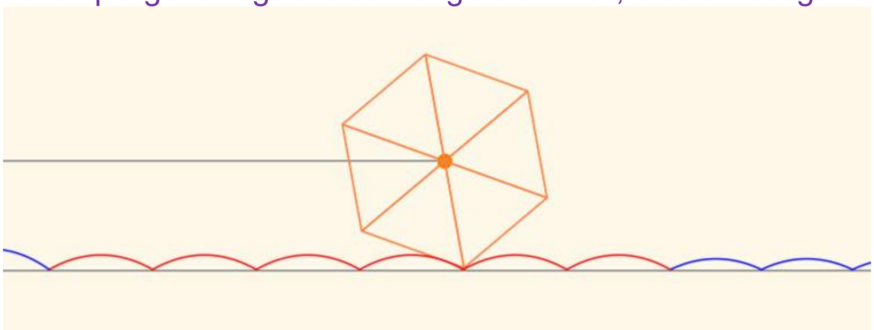
Individua tale poligono regolare, motivando la risposta.

Anche in tal caso risulta: $f'(x) = -\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^{-x} - e^x}{2}$, $f'\left(-\frac{\ln(3)}{2}\right) = \frac{e^{\frac{\ln(3)}{2}} - e^{-\frac{\ln(3)}{2}}}{2} =$

$$= \frac{\left(e^{\ln(3)}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(e^{\ln(3)}\right)^{-\frac{1}{2}}}{2} = \frac{\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}}{2} = \frac{\frac{2}{3}\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

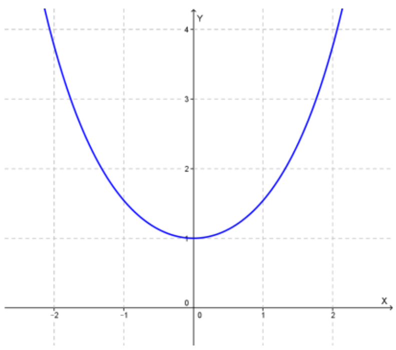
Quindi la tangente destra nel punto $\left(-\frac{\ln(3)}{2}; 0\right)$ è inclinata di 30°. Per simmetria la tangente sinistra è inclinata di 150°; le due tangenti formano quindi un angolo di $180° - 60° = 120°$, che è la misura dell'angolo interno dell'esagono regolare.

La ruota è quindi un poligono regolare con angolo di 120°, cioè un esagono.



Osservazione

La curva di equazione $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ è detta "catenaria" ed è indicata anche con il simbolo Ch $(coseno\ iperbolico)$. Il suo grafico è indicato a fianco.



Con la collaborazione di Angela Santamaria