LICEO SCIENTIFICO 2017 - PROBLEMA 2

Consideriamo la funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, periodica di periodo* $T = 4$ *il cui grafico, nell'intervallo [0; 4], è il seguente:*

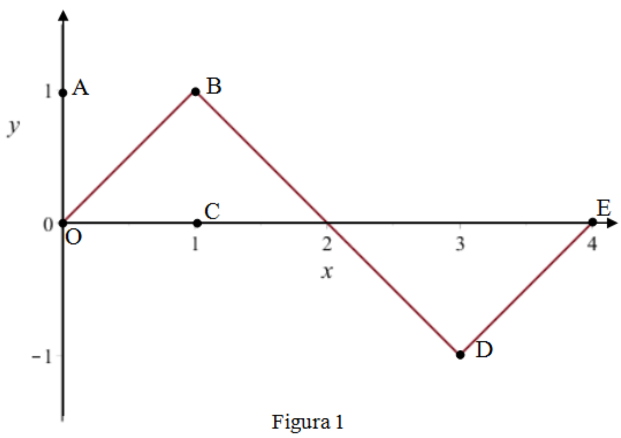


Figura 1

Come si evince dalla $Figura\ 1$*, i tratti* OB, BD, DE *del grafico sono segmenti i cui estremi hanno coordinate:* $O(0,0), B(1,1), D(3,-1), E(4,0)$.

1)

Stabilisci in quali punti del suo insieme di definizione la funzione f *è continua e in quali è derivabile e verifica l'esistenza dei limiti:* $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ *e* $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ *; qualora esistano, determinane il valore.*
Rappresenta inoltre, per $x \in [0;\ 4]$*, i grafici delle funzioni:*

$$g(x) = f'(x)\,, \quad h(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

La funzione è continua in tutto il suo dominio, mentre non è derivabile nei punti di ascissa $x = 2k + 1\,,\ \ con\ \ k \in \mathbb{Z}\,.$

La funzione oscilla fra -1 e 1, quindi non esiste il $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
Invece esiste il $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ ed è uguale a 0 per il teorema dl confronto, essendo (x>0)

$-\frac{1}{x} \le \frac{f(x)}{x} \le \frac{1}{x}$ con gli estremi (i due carabinieri!) tendenti a zero per $x \to +\infty$.

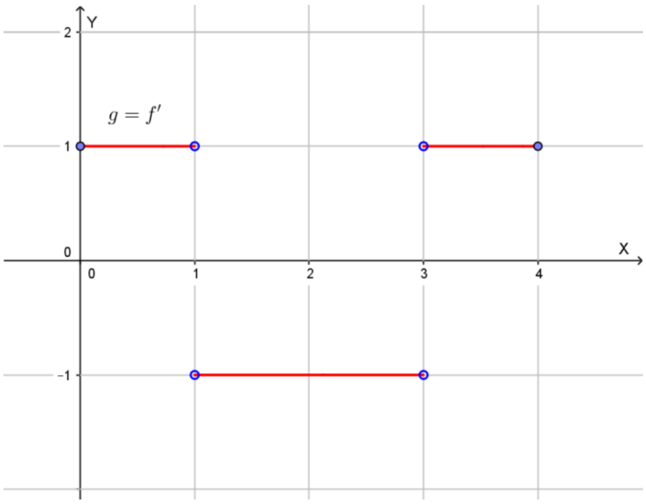
Possiamo indicare l'espressione analitica di f nell'intervallo indicato:

$$f(x)=\begin{cases} x, & se\ 0\le x\le 1\\ -x+2, & se\ 1<x\le 3\\ x-4, & se\ 3<x\le 4\end{cases}$$

Segue facilmente l'espressione analitica di $g(x)=f'(x)$:

$$g(x)=f'(x)=\begin{cases} 1, & se\ 0\le x<1\\ -1, & se\ 1<x<3\\ 1, & se\ 3<x\le 4\end{cases}$$

Il grafico di g è il seguente:



Studiamo ora la funzione integrale $h(x)=\int_0^x f(t)\,dt$. Questa funzione può essere studiata in modo qualitativo ma, essendo nota l'espressione analitica di f(x) possiamo trovare anche l'espressione analitica di h(x), che è una funzione continua e derivabile, con derivata uguale ad f(x). Essendo:

$$f(x)=\begin{cases} x, & se\ 0\le x\le 1\\ -x+2, & se\ 1<x\le 3\\ x-4, & se\ 3<x\le 4\end{cases}$$

Se $0\le x\le 1$: $h(x)=\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^x t\,dt=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^x=\frac{1}{2}x^2$

Se $1<x\le 3$: $h(x)=\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^1 f(t)\,dt+\int_1^x f(t)\,dt=\int_0^1 t\,dt+\int_1^x(-t+2)\,dt=$

$$=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^1+\left[-\frac{1}{2}t^2+2t\right]_1^x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x^2+2x-\left(-\frac{1}{2}+2\right)=-\frac{1}{2}x^2+2x-1$$

Se $3<x\le 4$: $h(x)=\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^1 f(t)\,dt+\int_1^3 f(t)\,dt+\int_3^x f(t)\,dt=$

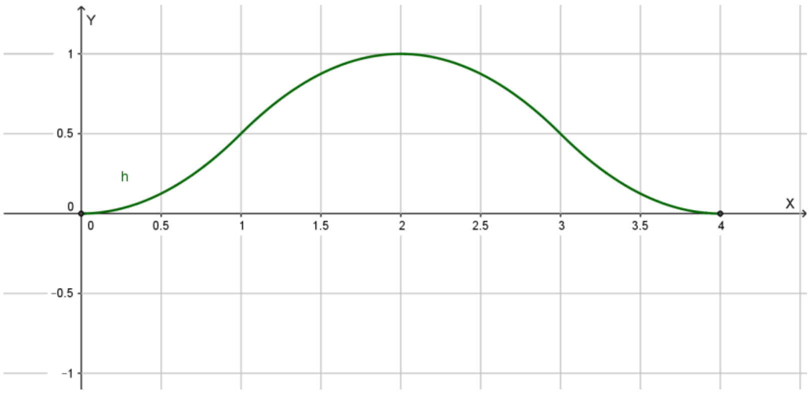
$$=\frac{1}{2}+\left[-\frac{1}{2}t^2+2t\right]_1^3+\int_3^x(t-4)\,dt=\frac{1}{2}+\left[-\frac{9}{2}+6-(-\frac{1}{2}+2)\right]+\left[\frac{1}{2}t^2-4t\right]_3^x=$$

$$= \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2}x^2 - 4x - \left(\frac{9}{2} - 12\right) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 8$$

Quindi:

$$h(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2, \ \ se \ \ 0 \le x \le 1 \\ -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1, \ \ se \ \ 1 < x \le 3 \\ \frac{1}{2}x^2 - 4x + 8, \ \ se \ \ 3 < x \le 4 \end{cases}$$

Si tratta di tre parti di parabola, il cui grafico complessivo è il seguente:

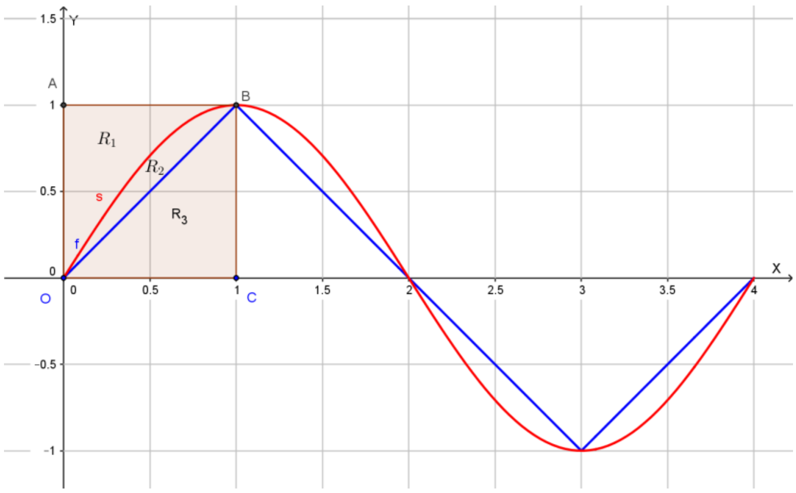


2)

Considera la funzione: $s(x) = sen(bx)$ con b costante reale positiva; determina b in modo che $s(x)$ abbia lo stesso periodo di $f(x)$.
Dimostra che la porzione quadrata di piano $OABC$ in $Figura$ 1 viene suddivisa dai grafici di $f(x)$ e $s(x)$ in 3 parti distinte e determina le probabilità che un punto preso a caso all'interno del quadrato $OABC$ ricada in ciascuna delle 3 parti individuate.

La funzione $s(x) = sen(bx)$ ha periodo $T = \frac{2\pi}{b} = 4 \ \ se \ \ b = \frac{\pi}{2}$; quindi $s(x) = sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

Rappresentiamo nello stesso piano cartesiano le due funzioni f(x) ed s(x) insieme al quadrato OABC ed indichiamo con $R_1, R_2 \ ed \ R_3$ le parti richieste:



Calcoliamo le aree delle tre regioni:

$$Area(R_1) = 1 - \int_0^1 sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx = 1 - \left[-\frac{2}{\pi}cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]_0^1 = 1 - \frac{2}{\pi}$$

$$Area(R_2) = \int_0^1 sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx - \frac{1}{2} = \frac{2}{\pi} - \frac{1}{2}$$

$$Area(R_3) = \frac{1}{2}$$

Le probabilità richieste sono quindi:

$$p_1 = \frac{Area(R_1)}{Area(OABC)} = 1 - \frac{2}{\pi} \cong 0.36 = 36\%$$

$$p_2 = \frac{Area(R_2)}{Area(OABC)} = \frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} \cong 0.14 = 14\ \%$$

$$p_3 = \frac{Area(R_3)}{Area(OABC)} = \frac{1}{2} = 0.50 = 50\ \%$$

3)

Considerando ora le funzioni: $f^2(x)$ e $s^2(x)$ *discuti, anche con argomentazioni qualitative, le variazioni (in aumento o in diminuzione) dei 3 valori di probabilità determinati al punto precedente.*

Osserviamo che, essendo f(x) ed s(x) minori o uguale ad 1, i loro quadrati sono inferiori, perciò:

$f^2(x) \leq f(x)$ ed $s^2(x) \leq s(x)$

Si ha pertanto:

$$\int_0^1 sen\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx \geq \int_0^1 sen^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx,$$

pertanto l'area $Area(R_1)$ aumenta (si ottiene sottraendo ad 1 una quantità minore):

la probabilità p_1 quindi aumenta.

Si ha poi:

$$\int_0^1 f(x)\, dx \geq \int_0^1 f^2(x)\, dx$$

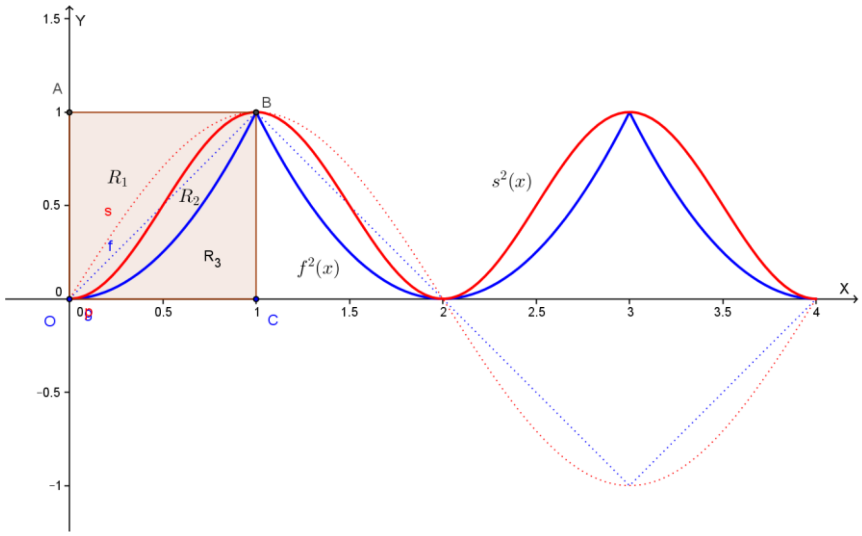
pertanto l'area $Area(R_3)$ diminuisce (è inferiore ad $\frac{1}{2}$):
la probabilità p_3 quindi diminuisce.

Per quanto riguarda l'area della regione compresa fra il grafico di $s^2(x)$ ed $f^2(x)$ effettuiamo il calcolo diretto (notiamo che il grafico di $s^2(x)$ sta sopra quello di $f^2(x)$):

$$Area(R_2) = \int_0^1 [s^2(x) - f^2(x)]dx = \int_0^1 \left[sen^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) - x^2\right] dx = \int_0^1 \left[\frac{1-\cos(\pi x)}{2} - x^2\right] dx =$$
$$= \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{2\pi}sen(\pi x) - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{2} - 0 - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \cong 0.17 = 17\ \% > 14\ \%$$

Quindi la probabilità p_2 aumenta.

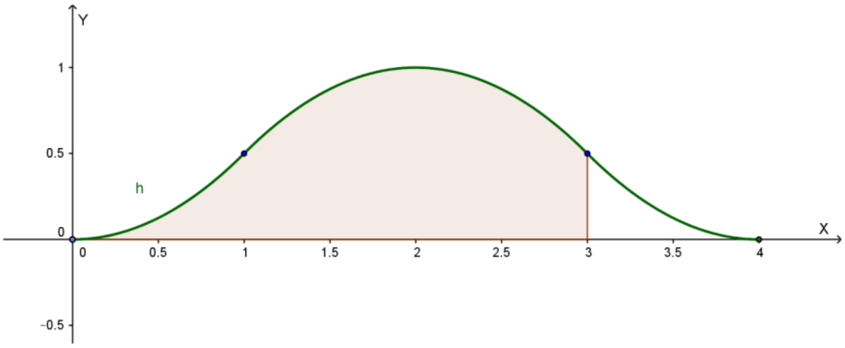
Rappresentiamo graficamente la nuova situazione:



4)

Determina infine il volume del solido generato dalla rotazione attorno all'asse y della porzione di piano compresa tra il grafico della funzione h per $x \in [0;\ 3]$ e l'asse delle x.

Rappresentiamo la regione piana richiesta:



Calcoliamo il volume generato dalla rotazione attorno all'asse y utilizzando il metodo dei gusci cilindrici. Si veda approfondimento alla pagina

http://www.matefilia.it/argomen/gusci-cilindrici/metodo-gusci-cilindrici.pdf

$$V = 2\pi\int_0^1 x\cdot h(x)dx + 2\pi\int_1^3 x\cdot h(x)\,dx = 2\pi\left[\int_0^1 x\cdot\frac{1}{2}x^2dx + \int_1^3 x\cdot\left(-\frac{1}{2}x^2+2x-1\right)dx\right]$$

$$= 2\pi\left[\int_0^1 \frac{1}{2}x^3dx + \int_1^3\left(-\frac{1}{2}x^3+2x^2-x\right)dx\right] = 2\pi\left[\left[\frac{1}{8}x^4\right]_0^1 + \left[-\frac{1}{8}x^4+\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_1^3\right] =$$

$$= 2\pi\left(\frac{1}{8}+\frac{10}{3}\right) = \left(\frac{83}{12}\pi\right)\ u^3 \cong 21.729\ u^3 = V$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria