LICEO SCIENTIFICO 2018 - PROBLEMA 1

Devi programmare il funzionamento di una macchina che viene adoperata nella produzione industriale di mattonelle per pavimenti. Le mattonelle sono di forma quadrata di lato 1 (in un'opportuna unità di misura) e le fasi di lavoro sono le seguenti:

- *si sceglie una funzione definita e continua nell'intervallo [0,1], che soddisfi le condizioni:*

  a) $f(0)=1$; b) $f(1)=0$; c) $0<f(x)<1$ per $0<x<1$

- La macchina traccia il grafico Γ della funzione $y=f(x)$ e i grafici simmetrici di Γ rispetto all'asse y, all'asse x e all'origine O, ottenendo in questo modo una curva chiusa Λ, passante per i punti (1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1), simmetrica rispetto agli assi cartesiani e all'origine, contenuta nel quadrato Q di vertici (1,1), (-1,1), (-1,-1), (1,-1).

- La macchina costruisce la mattonella colorando di grigio l'interno della curva chiusa e lasciando bianca la parte restante del quadrato Q; vengono quindi mostrate sul display alcune mattonelle affiancate, per dare un'idea dell'aspetto del pavimento.

Il manuale d'uso riporta un esempio del processo realizzativo di una mattonella semplice:

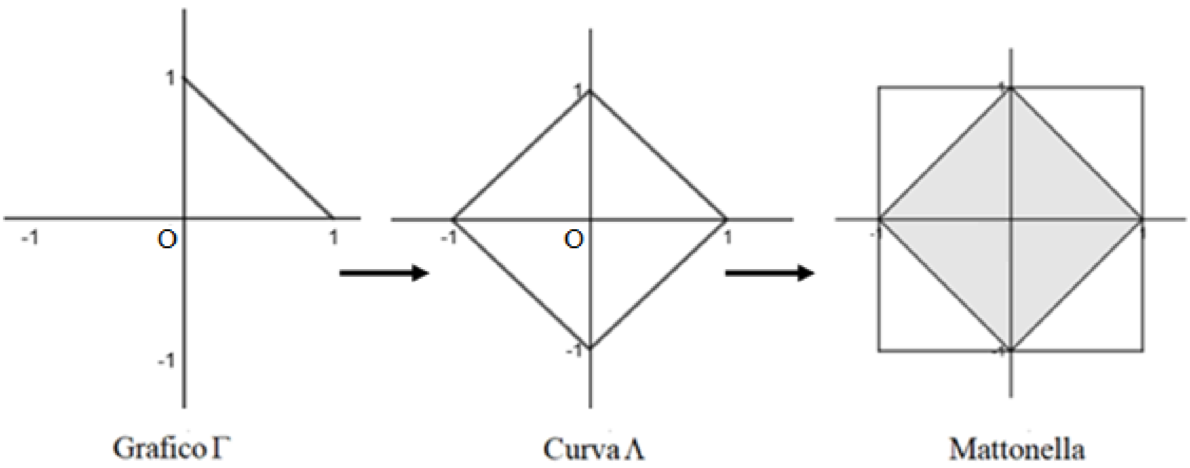


Figura 1

N.B. Mentre nel testo il lato della mattonella è 1 nel grafico è 2! Assumiamo lato=2.

La pavimentazione risultante è riportata di seguito:

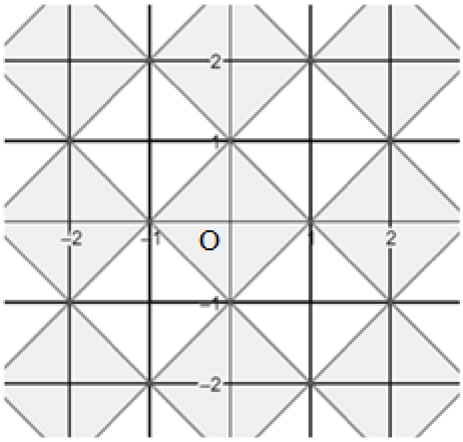


Figura 2

1)

Con riferimento all'esempio, determina l'espressione della funzione y=f(x) e l'equazione della curva Λ, così da poter effettuare una prova e verificare il funzionamento della macchina.

Risulta: $y = f(x) = -x + 1 \quad con \quad 0 \leq x \leq 1$

Con $y = -|x| + 1$ abbiamo i lati della mattonella del primo e del secondo quadrante.

Per avere tutti e quattro i lati:

$\Lambda\!: \quad y = \pm(-|x| + 1) \quad con \quad 0 \leq x \leq 1; \quad equivalente\ a: \quad |y| = -|x| + 1$

Ti viene richiesto di costruire una mattonella con un disegno più elaborato che, oltre a rispettare le condizioni a), b) e c) descritte in precedenza, abbia $f'(0) = 0$ e l'area della parte colorata pari al 55% dell'area dell'intera mattonella. A tale scopo, prendi in considerazione funzioni polinomiali di secondo grado e di terzo grado.

2)

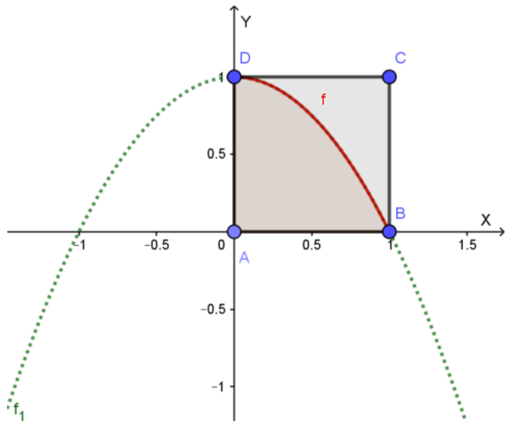
Dopo aver verificato che non è possibile realizzare quanto richiesto adoperando una funzione polinomiale di secondo grado, determina i coefficienti $a, b, c, d \in R$ della funzione f(x) polinomiale di terzo grado che soddisfa le condizioni poste. Rappresenta infine in un piano cartesiano la mattonella risultante.

Se f(x) è funzione polinomiale di secondo grado abbiamo: $y = f(x) = ax^2 + bx + c$
Imponendo le condizioni a e b abbiamo:
$f(0) = 1, \quad 1 = c$

$f(1) = 0, \qquad 0 = a + b + c = a + b + 1: \; b = -a - 1$

Risulta $f'(x) = 2ax + b \;\; e \; da \;\; f'(0) = 0 \;\; si \; ha \;\; b = 0, \;\; quindi \; a = -1$

Si ha pertanto: $y = f(x) = -x^2 + 1$ (parabola con vertice (0;1) e passante per (1; 0) e (-1; 0):



Affinché l'area della parte colorata sia il 55 % dell'area dell'intera mattonella deve essere:

$\int_0^1 (-x^2 + 1)\, dx = 0.55$. Ma risulta:

$$\int_0^1 (-x^2 + 1)\, dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + x\right]_0^1 = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3} \neq 0.55$$

Quindi non è possibile realizzare quanto richiesto adoperando una funzione polinomiale di secondo grado.

Se f(x) è funzione polinomiale di terzo grado abbiamo: $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Imponendo le condizioni a e b abbiamo:

$f(0) = 1\,, \;\; 1 = d$

$f(1) = 0, \qquad 0 = a + b + c + d = a + b + c + 1$

Risulta $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \quad e \; da \;\; f'(0) = 0 \;\; si \; ha \;\; c = 0, \;\; quindi \; b = -1 - a$

Pertanto: $f(x) = ax^3 - (a + 1)x^2 + 1$

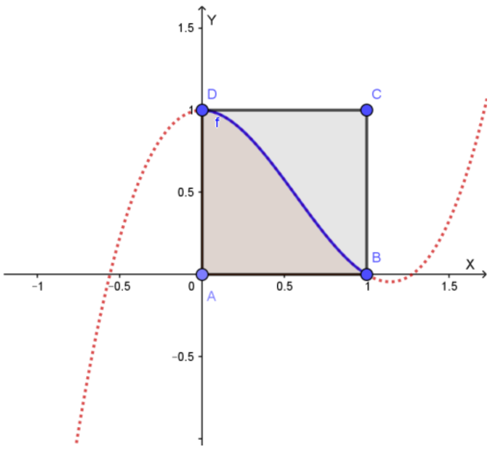
Affinché l'area della parte colorata sia il 55 % dell'area dell'intera mattonella deve essere:

$\int_0^1 [ax^3 - (a + 1)x^2 + 1]\, dx = 0.55$. Quindi:

$\left[\frac{1}{4}ax^4 - \frac{1}{3}(a + 1)x^3 + x\right]_0^1 = \frac{1}{4}a - \frac{1}{3}(a + 1) + 1 = -\frac{1}{12}a + \frac{2}{3} = 0.55, \;\; a = \frac{7}{5}$

La cubica ha quindi equazione:

$$y = f(x) = \frac{7}{5}x^3 - \frac{12}{5}x^2 + 1$$



Per studiare la cubica basta osservare che i limiti a + o – infinito sono + o – infinito e studiare la derivata prima e seconda:

$$f'(x) = \frac{21}{5}x^2 - \frac{24}{5}x \geq 0 \;\; per \;\; 7x^2 - 8x \geq 0{:} \;\; x \leq 0 \;\; oppure \; x \geq 8/7$$

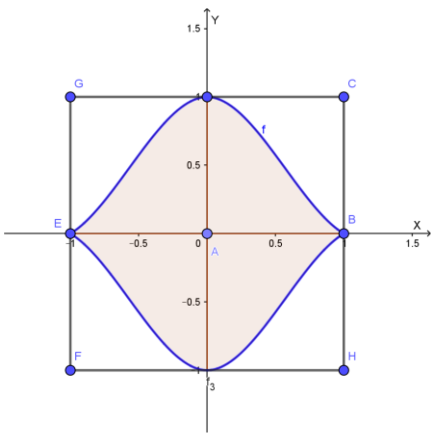
$$Quindi \; x = 0 \; punto \; di \; massimo \; relativo \; e \; x = \frac{8}{7} punto \; di \; minimo \; relativo.$$

$$f''(x) = \frac{42}{5}x - \frac{24}{5} \geq 0 \;\; per \;\; 7x - 4 \geq 0, \qquad x \geq \frac{4}{7}; \quad x = \frac{4}{7} \;\; punto \; di \; flesso$$

Le intersezioni con l'asse x (non necessarie ai fini del problema) si possono ottenere abbassando di grado mediante la regola di Ruffini l'equazione

$$\frac{7}{5}x^3 - \frac{12}{5}x^2 + 1 = 0 \;\;\; che \; ha \; radice \; x = 1$$

Rappresentiamo la mattonella risultante in questo caso:



Vengono proposti a un cliente due tipi diversi di disegno, derivanti rispettivamente dalle funzioni $a_n(x) = 1 - x^n$ *e* $b_n(x) = (1-x)^n$ *, considerate per* $x \in [0; 1]$ *con n intero positivo.*

3)

Verifica che al variare di n tutte queste funzioni rispettano le condizioni a), b) e c). Dette A_n *e* B_n *le aree delle parti colorate delle mattonelle ottenute a partire da tali funzioni* a_n *e* b_n *, calcola*

$$\lim_{n\to+\infty} A(n) \quad e \quad \lim_{n\to+\infty} B(n)$$

e ed interpreta i risultati in termini geometrici.

a) f(0)=1; b) f(1)=0; c) 0<f(x)<1 per 0<x<1

$a_n(x) = 1 - x^n$

$$a_n(0) = 1 \ , \ a_n(1) = 0, \ 0 < 1 - x^n < 1: \begin{cases} 1 - x^n > 0 \ \ vero\ per\ 0 < x < 1 \\ 1 - x^n < 1, \quad vero \end{cases}$$

$b_n(x) = (1-x)^n$

$$b_n(0) = 1, \quad b_n(1) = 0, \ 0 < (1-x)^n < 1 : \begin{cases} (1-x)^n > 0 : \ vero\ perch\grave{e}\ \ 1 - x > 0 \\ (1-x)^n < 1 : \ vero\ perch\grave{e}\ \ 1 - x < 1 \end{cases}$$

Calcoliamo i limiti richiesti:

$$\lim_{n\to+\infty} A(n) = 4 \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 (1 - x^n)dx = 4 \lim_{n\to+\infty} \left[x - \frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = 4 \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 4$$

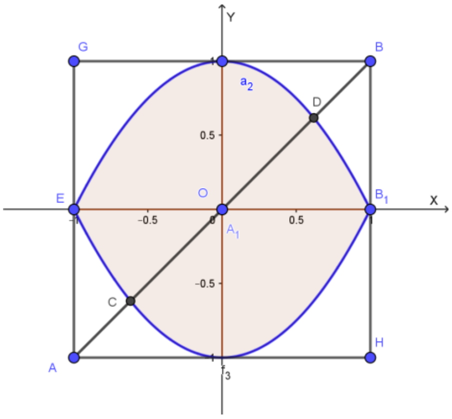
Significato geometrico: la zona colorata per n che tende a + infinito tende a riempire tutta la mattonella.

$$\lim_{n\to+\infty} B(n) = 4 \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 (1-x)^n dx = 4 \lim_{n\to+\infty} \left[-\frac{1}{n+1}(1-x)^{n+1}\right]_0^1 = 4 \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n+1}\right) = 0$$

Significato geometrico: la zona colorata per n che tende a + infinito tende a ridursi a zero.

Il cliente decide di ordinare 5.000 mattonelle con il disegno derivato da $a_2(x)$ *e 5.000 con quello derivato da* $b_2(x)$ *. La verniciatura viene effettuata da un braccio meccanico che, dopo aver depositato il colore, torna alla posizione iniziale sorvolando la mattonella lungo la diagonale. A causa di un malfunzionamento, durante la produzione delle 10.000 mattonelle si verifica con una probabilità del 20% che il braccio meccanico lasci cadere una goccia di colore in un punto a caso lungo la diagonale, macchiando così la mattonella appena prodotta.*

$\boldsymbol{a_2(x) = 1 - x^2}$



La probabilità che cada una goccia nella zona da non colorare è data da:

$$p(\textit{che cada sulla diagonale}) \cdot p(\textit{che cada su AC o BD}) = 0.20 \cdot p$$

Calcoliamo la probabilità p:

$$p = \frac{AC + BD}{AB} = \frac{2BD}{2\sqrt{2}} = \frac{BD}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} - OD}{\sqrt{2}}$$

Per trovare D cerchiamo l'intersezione fra $a_2(x) = 1 - x^2$ e $y = x$:

$$1 - x^2 = x, \qquad x^2 + x - 1 = 0, \qquad x_D = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \quad OD = x_D\sqrt{2} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \cdot \sqrt{2}$$

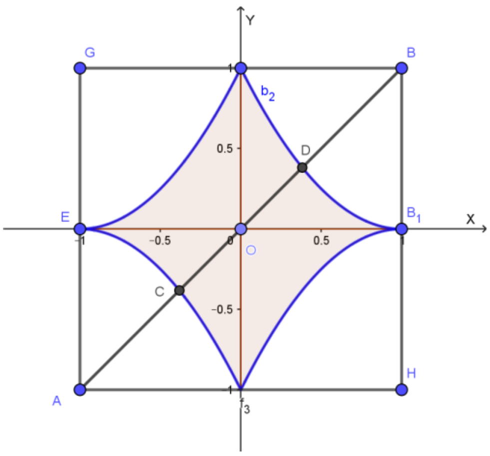
Quindi:

$$p = \frac{\sqrt{2} - OD}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} - \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1 - \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = p$$

Perciò la probabilità che sia danneggiata una mattonella di questo tipo è:

$$0.20 \cdot p = 0.20 \cdot \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = \frac{3 - \sqrt{5}}{10} \cong 0.076 = 7.6\ \%$$

$\boldsymbol{b_2(x) = (1 - x)^2}$



Calcoliamo l'ascissa di D:

$$(1-x)^2 = x,\ \ x^2 - 3x + 1 = 0,\ \ x_D = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

In questo caso si ha quindi:

$$p = \frac{\sqrt{2} - OD}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} - \frac{3-\sqrt{5}}{2} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1 - \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = p$$

Perciò la probabilità che sia danneggiata una mattonella di questo tipo è:

$$0.20 \cdot p = 0.20 \cdot \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{-1+\sqrt{5}}{10} \cong 0.124 = 12.4\ \%$$

4)

Fornisci una stima motivata del numero di mattonelle che, avendo una macchia nella parte non colorata, risulteranno danneggiate al termine del ciclo di produzione.

Delle 5000 mattonelle del primo tipo ne risultano danneggiate circa il $7.6\ \%$, quindi circa:

$$\frac{7.6}{100}(5000) = 380$$

Delle 5000 mattonelle del secondo tipo ne risultano danneggiate circa il $12.4\ \%$, quindi circa:

$$\frac{12.4}{100}(5000) = 620$$

Alla fine del ciclo di produzione delle 10000 mattonelle ne risultano quindi danneggiate circa 1000.

Con la collaborazione di Angela Santamaria