LICEO SCIENTIFICO 2018 - PROBLEMA 2

Consideriamo $f_k(x): R \rightarrow R$ *così definita:*

$$f_k(x) = -x^3 + kx + 9\,, \qquad con\ k\ \in Z$$

1)

Detto Γ_k *il grafico della funzione, verifica che per qualsiasi valore del parametro k la retta* r_k*, tangente a* Γ_k *nel punto di ascissa 0 e la retta* s_k *, tangente a* Γ_k *nel punto di ascissa 1, si incontrano in un punto M di ascissa* $\frac{2}{3}$ *.*

Cerchiamo la tangente al grafico della funzione in x=0 (con f(0)=9)

$f' = -3x^2 + k\,,\ \ f'(0) = k,\qquad r_k\!:\ y - 9 = kx,\ \ y = kx + 9$

Cerchiamo la tangente al grafico della funzione in x=1 (con f(1)=k+8)

$f' = -3x^2 + k\,,\ \ f'(1) = -3 + k,\qquad s_k\!:\ y - k - 8 = (k-3)(x-1),\ \ y = (k-3)x + 11$

Intersechiamo $r_k ed\ s_k$: $kx + 9 = (k-3)x + 11,\ \ 9 = -3x + 11,\ \ x = \frac{2}{3}$.

2)

Dopo aver verificato che k=1 è il massimo intero positivo per cui l'ordinata del punto M è minore di 10, studia l'andamento della funzione $f_1(x)$ *, determinandone i punti stazionari e di flesso e tracciandone il grafico.*

Se $x = \frac{2}{3}$, sostituendo per esempio in r_k otteniamo $y_M = \frac{2}{3}k + 9 < 10\ \ se\ k < \frac{3}{2}$ ed il massimo intero minore di 3/2 e 1.

La funzione f_1 ha equazione: $\boldsymbol{y = -x^3 + x + 9}$

Notato che i limiti a – infinito e + infinito sono rispettivamente – infinito e + infinito, studiamo la derivata prima:

$y' = -3x^2 + 1 \geq 0\ \ se\ \ -\frac{\sqrt{3}}{3} \leq x \leq \frac{\sqrt{3}}{3}\ \ ; x = -\frac{\sqrt{3}}{3}\ \ punto\ di\ minimo\ relativo,$

$x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $punto\ di\ massimo\ relativo$.

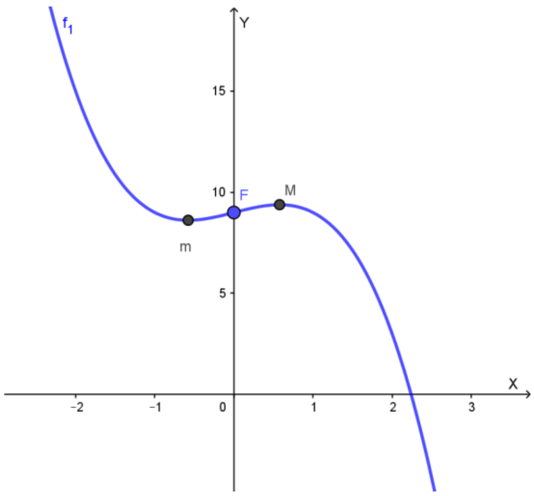
Studiamo la derivata seconda:

$y'' = -6x \geq 0$ $se\ x \leq 0$: $flesso\ per\ x = 0$, concavità verso l'alto per x<0.

Punti stazionari: $m = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; f_1\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$, $M = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}; f_1\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$

Punto di flesso: $F = (0; 9)$

Grafico:



3)

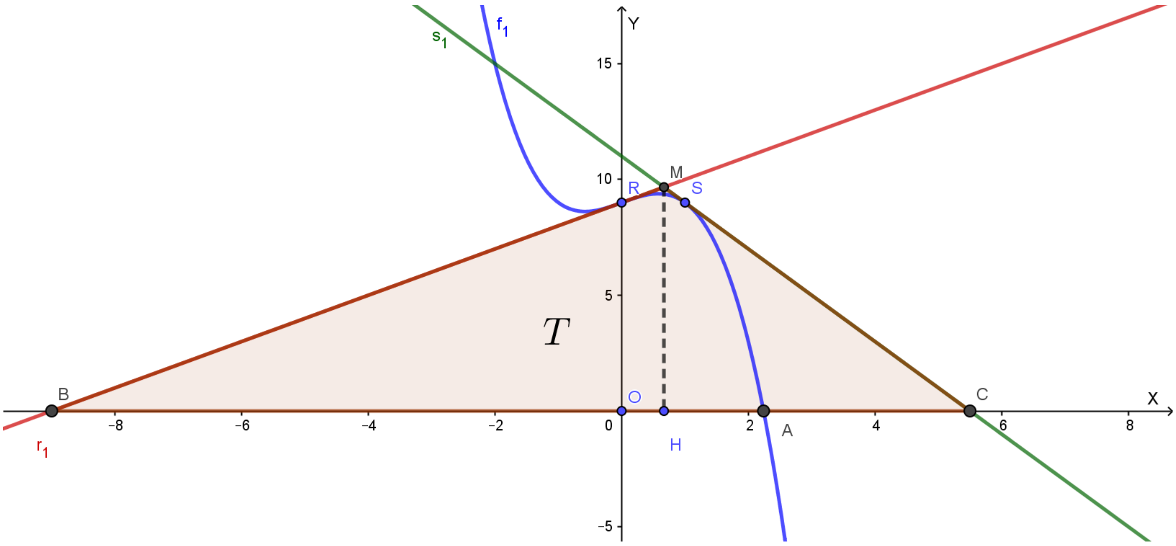
Detto T il triangolo delimitato dalle rette r_1, s_1 e dall'asse delle ascisse, determina la probabilità che, preso a caso un punto all'interno di T, questo si trovi al di sopra di Γ_1 (cioè che si abbia $y_P > f_1(x)$ per tale punto P).

Per k=1 le rette richieste sono:

$r_1: y = x + 9$, s_1: $y = -2x + 11$

Esse si intersecano in $M = \left(\frac{2}{3}; \frac{29}{3}\right)$

Ricordiamo che la prima retta è tangente al grafico della funzione in R=(0; 9) e la seconda in S=(1; 9).



Le intersezioni delle rette con l'asse x sono: B=(-9; 0) e C=(11/2; 0). L'altezza del triangolo relativa alla base AB è l'ordinata di M, quindi:

$$Area(T) = \frac{1}{2}\left(\frac{11}{2}+9\right)\left(\frac{29}{3}\right) = \frac{841}{12}$$

La parte del triangolo sopra la curva è formata da due regioni: S_1, compresa fra la curva ed i segmenti RM ed MS ed S_2 compresa fra la curva, il segmento SC e l'asse x.

$$Area(S_1) + Area(S_2) = Area(OCMR) - \int_0^{x_A} (-x^3 + x + 9)\, dx$$

$$Area(OCMR) = Area(ORMH) + Area(MHC) = \frac{56}{9} + \frac{841}{36} = \frac{355}{12}$$

L'ascissa di A può essere trovata solo in modo approssimato utilizzando il **teorema degli zeri ed il metodo di bisezione**. Si ha: $f_1(2) > 0$, $f_1(3) < 0$ e la funzione è continua nell'intervallo chiuso [2; 3]; inoltre essa è decrescente in tale intervallo.

L'equazione $-x^3 + x + 9 = 0$ avrà quindi una sola radice compresa fra 2 e 3.

Utilizziamo il metodo di **bisezione** per trovare un valore approssimato:

$$c = \frac{2+3}{2} = 2.5, \qquad f_1(2.5) < 0, quindi\ la\ radice\ è\ fra\ 2\ e\ 2.5$$

Possiamo accontentarci di una veloce approssimazione scegliendo la media fra 2 e 2.5, che è 2.25.

$$\int_0^{2.25} (-x^3 + x + 9)\,dx = \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + 9x\right]_0^{2.25} = \cdots \cong 16.37$$

Quindi:

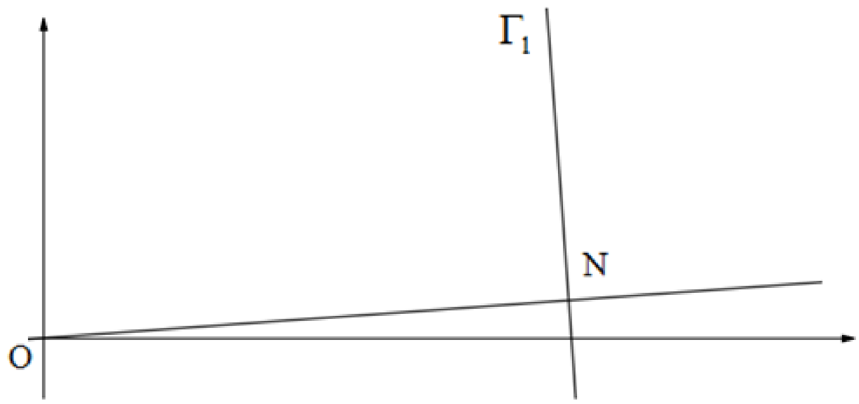
$$Area(S_1) + Area(S_2) \cong \frac{355}{12} - 16.27 = 13.31\ u^2$$

La probabilità richiesta è quindi:

$$p = \frac{Area\ favorevole}{Area\ possibile} = \frac{13.31}{\frac{841}{12}} \cong 0.19 = 19\ \%$$

4)

Nella figura è evidenziato un punto $N \in \Gamma_1$ e un tratto del grafico Γ_1. La retta normale a Γ_1 in N (vale a dire la perpendicolare alla retta tangente a Γ_1 in quel punto) passa per l'origine degli assi O. Il grafico Γ_1 possiede tre punti con questa proprietà. Dimostra, più in generale, che il grafico di un qualsiasi polinomio di grado $n > 0$ non può possedere più di $2n - 1$ punti nei quali la retta normale al grafico passa per l'origine.



Il punto N ha coordinate del tipo: $N = (t;\ -t^3 + t + 9)$; il coefficiente angolare della tangente in N è: $f_1'(t) = -3t^2 + 1$; il coefficiente angolare della normale in T (quando $-3t^2 + 1 \neq 0)$ è

$$-\frac{1}{f'(t)} = \frac{1}{3t^2 - 1}$$

La normale ha quindi equazione:

n: $y + t^3 - t - 9 = \frac{1}{3t^2 - 1}\ (x - t)$

(osserviamo esplicitamente che quando $-3t^2 + 1 = 0$ N è un punto a tangente orizzontale che non appartiene all'asse y, quindi la normale, parallela all'asse y, non passerà per l'origine O).

Siccome n passa per l'origine deve essere: $t^3 - t - 9 = \frac{t}{1-3t^2}$

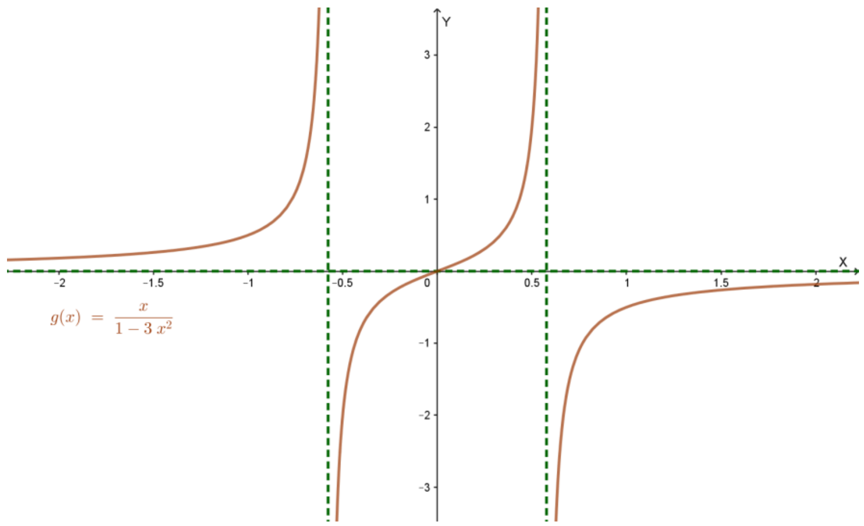
Per determinare il numero delle soluzioni di tale equazione rappresentiamo qualitativamente nello stesso piano cartesiano le curve di equazione

$y = h(x) = x^3 - x - 9 = -f_1(x)$ (simmetrica rispetto all'asse x della funzione già studiata nel punto 2) e $y = g(x) = \frac{x}{1-3x^2}$ che studieremo in modo qualitativo.

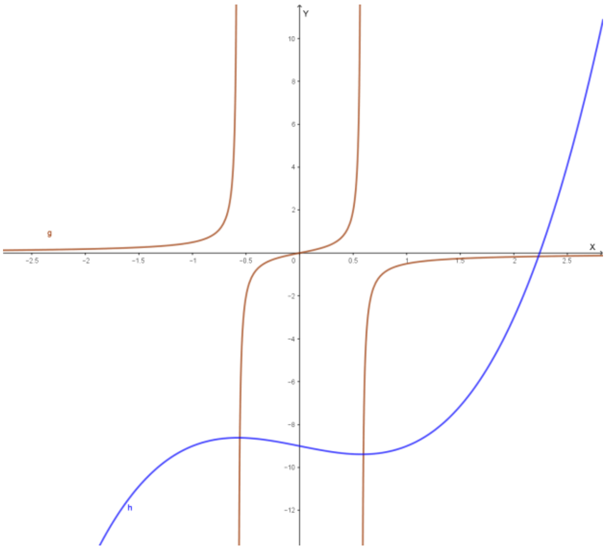
$$\boldsymbol{y = g(x) = \frac{x}{1 - 3x^2}}$$

Essa è definita per ogni $x \neq \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$, ammette gli asintoti verticali di equazioni $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$, tende a 0^+ per $x \to -\infty$ e a 0^- per $x \to +\infty$.
E' positiva per $x < -\frac{\sqrt{3}}{3}\ \ e\ \ per\ \ 0 < x < \frac{\sqrt{3}}{3}$

Ai fini del nostro studio ciò è sufficiente per tracciare un grafico qualitativo della funzione:



I grafici di $y = \frac{x}{1-3x^2}\ \ e\ \ di\ y = h(x) = x^3 - x - 9$ rappresentati nello stesso piano cartesiano mostrano chiaramente che ci sono tre soluzioni come richiesto:



Generalizziamo ora nel modo richiesto il procedimento suddetto.

$y = P_n(x), \qquad funzione\ polinomiale\ di\ grado\ n > 0$

Il punto N ha coordinate del tipo: $N = (t;\ P_n(t))$; il coefficiente angolare della tangente in N è: $P_n'(t) = Q_{n-1}(t)$: $polinomio\ di\ grado\ n-1$; il coefficiente angolare della normale in T (quando $P_n'(t) = Q_{n-1}(t) \neq 0$) è:

$$-\frac{1}{P_n'(t)} = -\frac{1}{Q_{n-1}(t)}$$

La normale ha quindi equazione:

$$n:\ y - P_n(t) = -\frac{1}{Q_{n-1}(t)}\ (x-t)$$

Siccome n passa per l'origine deve essere: $-P_n(t) = \frac{t}{Q_{n-1}(t)}$, equivalente a:

$$\boldsymbol{P_n(t) \cdot Q_{n-1}(t) + t = 0} \quad (*)$$

Questa equazione ha grado $n + (n-1) = 2n-1$, quindi, per il **teorema fondamentale dell'algebra** ammette al più $2n-1$ soluzioni.

Ci sono quindi al massimo $2n-1$ punti che soddisfano il problema.

$\boldsymbol{N.B.}$ Quando $P_n'(t) = Q_{n-1}(t) = 0$ la normale nel punto N passa per O solo se t=0, e tale soluzione è inclusa nelle soluzioni della (*), quindi non aumenta il valore 2n-1 già indicato.

Con la collaborazione di Angela Santamaria