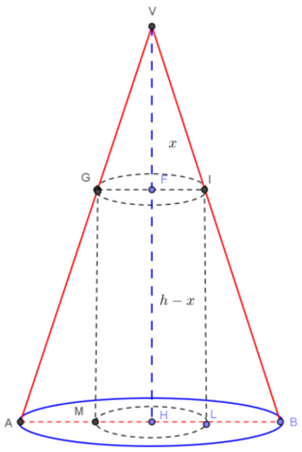
LICEO SCIENTIFICO 2018 - QUESTIONARIO

QUESITO 1

Dimostrare che il volume di un cilindro inscritto in un cono è minore della metà del volume del cono.



Indichiamo con h ed r l'altezza ed il raggio di base del cono e cerchiamo il cilindro inscritto di volume massimo. Basterà dimostrare che tale volume è minore della metà del volume del cono.

Indicata con x la distanza della base superiore del cilindro dal vertice del cono si ha:

$$V(cilindro) = \pi \cdot FG^2 \cdot (h-x)$$

Troviamo FG, raggio del cilindro, in funzione di x:

$$AH:FG = VH:VF\ , \quad r:FG = h:x, \quad FG = \frac{x \cdot r}{h}$$

Quindi:

$$V(cilindro) = \pi \cdot \left(\frac{x \cdot r}{h}\right)^2 \cdot (h-x) = \frac{\pi \cdot r^2}{h^2} \cdot x^2 \cdot (h-x)$$

Tale volume è massimo se lo è:

$$y = x^2 \cdot (h-x), \quad con \ \ 0 \le x \le h$$

Metodo delle derivate:

$$y' = 2x(h-x) - x^2 \ge 0 \ \ se \ -3x^2 + 2hx \ge 0\ , \quad 0 \le x \le \frac{2}{3}h$$

La funzione è quindi crescente per $0 \le x < \frac{2}{3}h$ e decrescente per $\frac{2}{3}h < x \le h$: il volume pertanto è massimo quando $x = \frac{2}{3}h.$

Per tale valore di x l'altezza del cilindro è: $h - x = \frac{1}{3}h$.

Il cilindro di volume massimo è quindi quello la cui altezza è un terzo dell'altezza del cono. Pertanto il volume massimo del cilindro è:

$$V_{max} = \frac{\pi \cdot r^2}{h^2} \cdot x^2 \cdot (h - x) = \frac{\pi \cdot r^2}{h^2} \cdot \frac{4}{9}h^2 \cdot \frac{1}{3}h = \frac{4}{27}\pi r^2 h$$

Il volume del cono è:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Deve essere:

$$\frac{4}{27}\pi r^2 h < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\pi r^2 h\right), \qquad cioè \;\; \frac{4}{27} < \frac{1}{6} \;:\;\; vero.$$

Per via elementare:

Dobbiamo trovare il massimo di:

$$y = x^2 \cdot (h - x), \quad con \;\; 0 \le x \le h$$

Ricordiamo che se $a + b = costante$ il prodotto di due potenze di a e b è massimo quando le basi sono proporzionali agli esponenti. Nel nostro caso: $a = x \; e \; b = h - x$.

Quindi $x^2 \cdot (h - x)$ è massimo se: $\frac{x}{2} = \frac{h-x}{1}$, $x = 2h - 2x$, $x = \frac{2}{3}h.$

QUESITO 2

Si dispone di due dadi uguali non bilanciati a forma di tetraedro regolare con le facce numerate da 1 a 4. Lanciando ciascuno dei due dadi, la probabilità che esca 1 è il doppio della probabilità che esca 2, che a sua volta è il doppio della probabilità che esca 3, che a sua volta è il doppio della probabilità che esca 4. Se si lanciano i due dadi contemporaneamente, qual è la probabilità che escano due numeri uguali tra loro?

Detta p=p(1) la probabilità che esca il 4 si ha: p(3)=2p(4)=2p, p(2)=2p(3)=4p, p(1)=2p(2)=8p, quindi, essendo la somma delle quattro probabilità uguale a 1, si ha:

$$p + 2p + 4p + 8p = 1, \quad p = \frac{1}{15} = p(4)$$

Quindi: $p(1) = \frac{8}{15}, \; p(2) = \frac{4}{15}, \; p(3) = \frac{2}{15}, \; p(4) = \frac{1}{15}$

La probabilità che escano due numeri uguali (1 e 1, 2 e 2, 3 e 3, 4 e 4) è data da:

$$p(1)p(1) + p(2)p(2) + p(3)p(3) + p(4)p(4) = \left(\frac{8}{15}\right)^2 + \left(\frac{4}{15}\right)^2 + \left(\frac{2}{15}\right)^2 + \left(\frac{1}{15}\right)^2 =$$

$$= \frac{85}{225} = \frac{17}{45} \cong 0.378 = 37.8\%$$

QUESITO 3

Determinare i valori di k tali che la retta di equazione $y = -4x + k$ *sia tangente alla curva di equazione* $y = x^3 - 4x^2 + 5$.

Affinchè due curve di equazioni y=f(x) e y=g(x) siano tangenti deve essere:

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$$

Quindi:

$$\begin{cases} -4x + k = x^3 - 4x^2 + 5 \\ -4 = 3x^2 - 8x \end{cases}$$

Dalla seconda equazione otteniamo $x = 2 \; e \; x = \frac{2}{3}$. Quindi, sostituendo nella prima equazione:

$$\begin{cases} x = 2 \\ k = 5 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ k = \frac{167}{27} \end{cases}$$

QUESITO 4

Considerata la funzione $f(x) = \frac{3x - e^{sen\,x}}{5 + e^{-x} - \cos x}$ *, determinare, se esistono, i valori di*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \,, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) \,,$$

giustificando adeguatamente le risposte fornite.

Per $x \to +\infty$ $\;e^{sen\,x}$ oscilla tra e^{-1} ed e^1 quindi il numeratore “si comporta” come 3x.
Al denominatore: e^{-x} tende a 0, cos x oscilla tra -1 e 1, quindi il denominatore oscilla tra 4 e 6. Siccome il numeratore tende a +∞, si ha:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Per $x \to -\infty$ il numeratore si comporta ancora come $3x$ ed il denominatore come e^{-x} (che tende a + infinito), dato che $5 - \cos x$ oscilla ancora fra 4 e 6; si ha quindi:

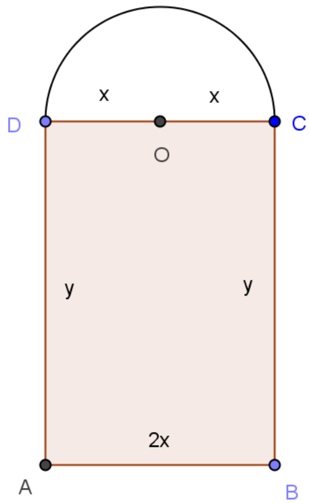
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{3x}{e^{-x}} = 0^-$$

(ricordiamo che l’infinito dell’esponenziale è di ordine superiore rispetto all’infinito della potenza)

QUESITO 5

Con una staccionata lunga 2 metri si vuole recintare una superficie avente la forma di un rettangolo sormontato da una semicirconferenza, come in figura:

Determinare le dimensioni dei lati del rettangolo che consentono di recintare la superficie di area massima.



Indicato con 2x il lato del rettangolo che coincide con il diametro della semicirconferenza e con y la misura dell'altro lato del rettangolo, osservando che la staccionata è formata dai lati AD, AB e BC del rettangolo e dalla semicirconferenza di diametro CD (senza diametro), si ha:

$$2x + 2y + \pi x = 1$$

Da cui: $y = 1 - x - \frac{\pi x}{2}$

Limitiamo la x:

Se x=0 si ha 2y=2. Quindi y=1.

Se y=0 deve essere $2x + \pi x = 2$, $x = \frac{2}{2+\pi}$

Risulta quindi: $0 \leq x \leq \frac{2}{2+\pi}$

L'area della superficie da recintare è data da:

$$Area = 2xy + \frac{1}{2}\pi x^2 = 2x\left(1 - x - \frac{\pi x}{2}\right) + \frac{1}{2}\pi x^2$$

$$Area = 2x - 2x^2 - \pi x^2 + \frac{1}{2}\pi x^2 = \left(-2 - \frac{1}{2}\pi\right)x^2 + 2x = z$$

La funzione da ottimizzare è una parabola con la concavità rivolta verso il basso, quindi il massimo si ha nel vertice (se incluso nelle limitazioni della x):

$$x_V = -\frac{b}{2a} = \frac{2}{4+\pi} < \frac{2}{2+\pi} \quad quindi\ accettabile.$$

Ovviamente si arriva allo stesso risultato derivando z:

$$z' = 2x\left(-2-\frac{\pi}{2}\right)+2 \geq 0 \;\; se \;\; x \leq \frac{2}{4+\pi}$$

Quindi z cresce per $0 < x < \frac{2}{4+\pi}$ e decresce per $\frac{2}{4+\pi} < x < \frac{2}{2+\pi}$ ed è pertanto massima per $x = \frac{2}{4+\pi}$

L'area massima (non richiesta) risulta:

$$Area(massima) = \left(-2-\frac{1}{2}\pi\right)\left(\frac{2}{4+\pi}\right)^2 + \frac{4}{4+\pi} = -\frac{1}{2}(4+\pi)\frac{4}{(4+\pi)^2} + \frac{4}{4+\pi} = \frac{2}{(4+\pi)}$$

Il lati del rettangolo che consentono di recintare l'area massima valgono:

$$AB = 2x = \frac{4}{4+\pi} \;\; , \;\; BC = y = 1 - x - \frac{\pi x}{2} = \frac{2}{4+\pi}$$

Osserviamo che la base è il doppio dell'altezza.

QUESITO 6

Determinare l'equazione della superficie sferica S, con centro sulla retta r: $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}, t \in R$

Tangente al piano π: $3x - y - 2z + 14 = 0$ *nel punto* $T = (-4; 0; 1)$.

Se la sfera è tangente al piano in T il suo centro appartiene alla normale n al piano in T.

La retta n ha parametri direttori (3,-1,-2), che sono i coefficienti di x, y e z del piano.
Quindi n ha equazioni parametriche:

$$n: \begin{cases} x = -4 + 3h \\ y = -h \\ z = 1 - 2h \end{cases}$$

Il centro della sfera si ottiene intersecando r con n:

$$\begin{cases} t = -4 + 3h \\ t = -h \\ t = 1 - 2h \end{cases} \quad -4 + 3h = -h, \qquad h = 1 \; e \; t = -1 \; (che \; verificano \; la \; terza \; equazione)$$

Il centro della sfera ha quindi coordinate: $C = (-1; \; -1; \; -1)$ ed il raggio è dato da CT:

$$CT = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}$$

L'equazione della sfera è quindi:

$$(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 14 \; .$$

QUESITO 7

Determinare a in modo che

$$\int_{a}^{a+1}(3x^2+3)dx$$

Sia uguale a 10.

$$\int_{a}^{a+1}(3x^2+3)dx=[x^3+3x]_a^{a+1}=(a+1)^3+3(a+1)-a^3-3a=10$$

$$a^2+a-2=0,\quad a=1\ e\ a=-2$$

QUESITO 8

In un gioco a due giocatori, ogni partita vinta frutta 1 punto e vince chi per primo raggiunge 10 punti. Due giocatori che in ciascuna partita hanno la stessa probabilità di vincere si sfidano. Qual è la probabilità che uno dei due giocatori vinca in un numero di partite minore o uguale a 12?

Le partite possono essere n=10, n=11 oppure n=12.
Per n=10 la probabilità che vinca uno dei due equivale alla probabilità che uno dei due le vinca tutte. Quindi, essendo $\frac{1}{2}$ la probabilità che uno dei due vinca, si ha:

$$p(10{,}10)=\binom{10}{10}p^{10}q^0=\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

Potendo vincere sia l'uno che l'altro, la probabilità che uno o l'altro vinca in 10 partite è:

$$p(10)=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=\frac{1}{2^9}$$

Per n=11 la probabilità che vinca uno dei due equivale alla probabilità di avere l'esito 10 a 1 , cioè alla probabilità di avere 10 successi in 11 prove ripetute con probabilità del successo pari ad ½ (distribuzione binomiale) meno la probabilità che si vincano le prime 10 partite su 11. Quindi la probabilità che uno dei due vinca in 11 partite è:

$$p(10{,}11)=\binom{11}{10}p^{10}q^1=11\left(\frac{1}{2}\right)^{11}=\frac{11}{2^{11}}$$

La probabilità che si vincano le prime 10 su 11 è uguale a: $\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{11}=\frac{1}{2^{11}}$
Quindi la probabilità che uno dei vinca 10 a 1 è: $\frac{11}{2^{11}}-\frac{1}{2^{11}}=\frac{10}{2^{11}}$

Potendo vincere sia l'uno che l'altro, la probabilità che uno o l'altro vinca in 11 partite è:

$$p(11) = 2 \cdot \frac{10}{2^{11}} = \frac{5}{2^9}$$

Per n=12 la probabilità che vinca uno dei due equivale alla probabilità di avere l'esito 10 a 2 cioè alla probabilità di avere 9 successi nelle prime 11 e vincere la dodicesima. Quindi la probabilità che uno dei due vinca in 12 partite è:

$$p(9,11) \cdot \frac{1}{2} = \left[\binom{11}{9} p^9 q^2\right] \cdot \frac{1}{2} = 55\left(\frac{1}{2}\right)^{11} \cdot \frac{1}{2} = \frac{55}{2^{12}}$$

Potendo vincere sia l'uno che l'altro, la probabilità che uno o l'altro vinca in 12 partite è:

$$p(12) = 2 \cdot \frac{55}{2^{12}} = \frac{55}{2^{11}}$$

Quindi la probabilità che uno dei due giocatori vinca in un numero di partite minore o uguale a 12 è:

$$p(10) + p(11) + p(12) = \frac{1}{2^9} + \frac{5}{2^9} + \frac{55}{2^{11}} = \frac{79}{2^{11}} = \frac{79}{2048} \cong 0.039 = 3.9\ \%$$

QUESITO 9

Sono dati, nello spazio tridimensionale, i punti A(3,1,0), B(3,-1,2), C(1,1,2). Dopo aver verificato che ABC è un triangolo equilatero e che è contenuto nel piano α di equazione $x + y + z - 4 = 0$, stabilire quali sono i punti P tali che ABCP sia un tetraedro regolare.

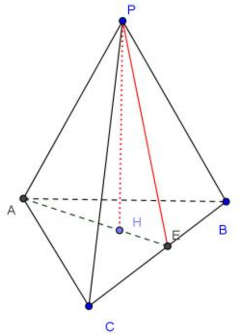
Calcolando le distanze AB, AC e BC risulta:

$$AB = AC = BC = \sqrt{8}$$

Quindi il triangolo è equilatero.
Per verificare che il triangolo è contenuto nel piano dato è sufficiente verificare che i punti A, B e C appartengono al piano stesso:

$$A: 3 + 1 + 0 - 4 = 0$$
$$B: 3 - 1 + 2 - 4 = 0$$
$$C: 1 + 1 + 2 - 4 = 0$$

I punti P richiesti appartengono alla normale al piano del triangolo nel suo baricentro.
Il baricentro del triangolo ha coordinate $H = \left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3}; \frac{y_A+y_B+y_C}{3}; \frac{z_A+z_B+z_C}{3}\right) = \left(\frac{7}{3}; \frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right)$.



La retta n perpendicolare al piano del triangolo in G (che ha gli stessi parametri direttori del piano) ha equazione:

$$n: \begin{cases} x = \frac{7}{3} + t \\ y = \frac{1}{3} + t \\ z = \frac{4}{3} + t \end{cases} \; ; \quad quindi \quad P = \left(\frac{7}{3} + t;\, \frac{1}{3} + t;\, \frac{4}{3} + t\right); \; PH^2 = t^2 + t^2 + t^2 = 3t^2$$

Primo metodo. Per una nota proprietà del baricentro di un triangolo si ha:

$$AH = \frac{2}{3}AE = \frac{2}{3}\left(AB\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2}{3}\sqrt{6}$$

Essendo il triangolo APH rettangolo in H si ha:

$$PH^2 = PA^2 - AH^2, \quad 3t^2 = 8 - \frac{8}{3}\,, \; 3t^2 = \frac{16}{3}, \; t = \pm\frac{4}{3}$$

Si hanno quindi due punti:

per $t = \frac{4}{3}$: $P_1 = \left(\frac{11}{3}; \frac{5}{3}; \frac{8}{3}\right)$, $per\ t = -\frac{4}{3}$: $P_2 = (1; -1; 0)$

Secondo metodo. Basta imporre che sia $PA = AB$.
Da $P = \left(\frac{7}{3} + t;\, \frac{1}{3} + t;\, \frac{4}{3} + t\right)$, $A(3,1,0)$ ed $AB = \sqrt{8}$ si ha:

$$\sqrt{\left(\frac{7}{3} + t - 3\right)^2 + \left(\frac{1}{3} + t - 1\right)^2 + \left(\frac{4}{3} + t\right)^2} = \sqrt{8} \;\Rightarrow \ldots \Rightarrow\; 3t^2 - \frac{16}{3} = 0: \; t = \pm\frac{4}{3}$$

QUESITO 10

Determinare quali sono i valori del parametro $k \in R$ per cui la funzione $y(x) = 2\,e^{kx+2}$ è soluzione dell'equazione differenziale $y'' - 2y' - 3y = 0$.

Si ha: $y' = 2ke^{kx+2}$, $y'' = 2k^2e^{kx+2}$ quindi:

$$2k^2e^{kx+2} - 4ke^{kx+2} - 6e^{kx+2} = 0, \; 2k^2 - 4k - 6 = 0 \; (e^{kx+2} \text{ è } diverso\ da\ zero)$$

$$k^2 - 2k - 3 = 0 \; : \; k = 3, \quad k = -1$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria